АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 5

РАСЧЕТ ДВУХЧАСТОТНОЙ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ И ВРЕМЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОМ ОКЕАНЕ

Сазонтов А. Г.

Рассмотрена задача о распространении узкополосного акустического импульса в хаотически-неоднородном океане. В рамках модового подхода сформулировано и проанализировано уравнение для двухчастотной функции взаимной когерентности звукового поля. В предельных случаях слабых и сильных флуктуаций получены асимптотические решения этого уравнения. Исследована зависимость времени задержки и характерной длительности принимаемого сигнала от длины трассы.

Рассеяние звуковых волн на неоднородностях водной толщи играет существенную роль в формировании акустического поля в глубоководных районах океана [1]. Процессы рассеяния влияют на временную структуру импульса, что проявляется в искажении формы сигнала, увеличении его длительности, запаздывании времени прихода «центра тяжести» в точку наблюдения. Теоретическая оценка указанных эффектов имеет важное значение как для разработки гидроакустических систем практического назначения, так и для решения обратных задач — дистанционной диагностики параметров океанической среды акустическими методами.

Как известно (см., например, [2]) основой для статистического описания флуктуационных характеристик импульсной волны, прошедшей через слой с крупномасштабными неоднородностями показателя преломления, является уравнение для двухчастотной функции взаимной корреляции поля. В настоящей работе в рамках модового подхода сформулировано соответствующее уравнение (учитывающее волноводный характер распространения звука) и проанализировано в предположении, что ширина полосы зондирующего импульса мала по сравнению с несущей частотой. (Задача о распространении широкополосного импульса в подводном звуковом канале рассматривалась в [3].) На основе полученных приближенных аналитических решений для двухчастотной функции когерентности в статье выведены основные расчетные формулы, позволяющие количественно описать эффекты задержки и временного уширения звукового импульса в океаническом волноводе в зависимости от длины трассы.

Рассмотрим глубоководный океанический звуковой волновод, в котором акустический показатель преломления $n(\mathbf{r}, z)$ наряду с регулярной составляющей $n_0(z)$ содержит флуктуационную компоненту $\mu(\mathbf{r}, z)$: $n(\mathbf{r}, z) = n_0(z) + \mu(\mathbf{r}, z)$, $\langle\mu(\mathbf{r}, z)\rangle = 0$, где z — вертикальная координата, $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости, символ $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по статистическому ансамблю.

Будем полагать, что среда является статистически однородной и изотропной по горизонтали, так что корреляционная функция случайного поля $\mu(\mathbf{r}, z)$ может быть записана следующим образом:

$$\langle\mu(\mathbf{r}_1, z_1)\mu(\mathbf{r}_2, z_2)\rangle = B_\mu\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, z_1 - z_2; \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right).$$

Комплексную амплитуду звукового давления $p(\mathbf{r}, z, t)$ вдали от импульсного источника представим в виде суммы распространяющихся нормальных мод [3]

$$p(\mathbf{r}, z, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} g(\omega) \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{\varkappa_n(\omega)}} p_n(\mathbf{r}, \omega)\varphi_n(z, \omega). \quad (1)$$

Здесь $g(\omega)$ — частотный спектр входного сигнала, $\varphi_n(z, \omega)$ и $\varkappa_n^2(\omega)$ — соответственно ортонормированные собственные функции и собственные значения, принадлежащие дискретному спектру оператора $(d^2/dz^2) + k^2 n_0^2(z)$, $k = \omega/c_0$ — волновое число, c_0 — скорость звука на оси канала, M — число распространяющихся мод. Коэффициенты разложения $p_n(\mathbf{r}, \omega)$ являются случайными функциями координат и в волноводе с крупномасштабными по горизонтали неоднородностями подчиняются параболическому уравнению

$$\frac{\partial p_n}{\partial x} - i\varkappa_n p_n - \frac{i}{2\varkappa_n}\frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} = \sum_m \mu_{nm} p_m, \tag{2}$$

где

$$\mu_{nm}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{k^2}{\sqrt{\varkappa_n(\omega)\varkappa_m(\omega)}} \int_0^H dz n_0(z)\mu(\mathbf{r}, z)\varphi_n(z, \omega)\varphi_m(z, \omega)$$

(H — глубина океана), а координата x выбрана в направлении оси волноводного канала.

Приближение параболического уравнения, как известно [4], учитывает многократное рассеяние вперед и пренебрегает эффектами обратного рассеяния. Необходимыми условиями применимости (2) являются неравенства

$$\lambda_n \ll l_1, \quad x \ll l_1^4/\lambda_n^3, \quad x\sigma_n^{\text{обр}} \ll 1, \tag{3}$$

где l_1 — горизонтальный радиус корреляции флуктуаций, $\lambda_n = 2\pi/x_n$,

$$\sigma_n^{\text{обр}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_n(\varphi)\, d\varphi$$

— эффективный поперечник обратного рассеяния моды номера n ($\sigma_n(\varphi)$ — дифференциальное сечение рассеяния, общий вид которого в борновском приближении найден в [5]).

Нас будут интересовать корреляционные характеристики импульса на выходе энергетического приемника, выражающиеся через пространственный момент второго порядка поля давления:

$$B_p(x, \rho, R, z_1, z_2, t) = \left\langle p\left(x, R + \frac{1}{2}\rho, z_1, t\right) p^*\left(x, R - \frac{1}{2}\rho, z_2, t\right)\right\rangle.$$

Используя представление (1), для величины $B_p(\cdot)$ имеем

$$B_p(x, \rho, R, z_1, z_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 g(\omega_1) g^*(\omega_2)\Gamma(x, \rho, R, z_1, z_2; \omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}, \tag{4}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — двухчастотная функция когерентности, определяемая посредством

$$\Gamma(x, \rho, R, z_1, z_2; \omega_1, \omega_2) = \sum_n \sum_m \frac{1}{\sqrt{\varkappa_n(\omega_1)\varkappa_m(\omega_2)}} \times$$
$$\times \Gamma_{nm}(x, \rho, R; \omega_1, \omega_2)\varphi_n(z_1, \omega_1)\varphi_m(z_2, \omega_2), \tag{5}$$

$$\Gamma_{nm}(x, \rho, R; \omega_1, \omega_2) = \left\langle p_n\left(x, R + \frac{1}{2}\rho, \omega_1\right) p_m^*\left(x, R - \frac{1}{2}\rho, \omega_2\right)\right\rangle.$$

Из приведенных формул (4), (5) следует, что решение задачи о распространении и рассеянии импульса в океаническом волноводе сводится к нахождению двухчастотной функции взаимной когерентности мод Γ_{nm}. Исходя из (2), для Γ_{nm} стандартным методом статистической теории волн (см.,

например, [4]) можно получить уравнение

$$\frac{\partial \Gamma_{nm}}{\partial x} - i\left(\varkappa_n(\omega_1) - \varkappa_m(\omega_2)\right)\Gamma_{nm} - i\xi^+_{nm}\frac{\partial^2 \Gamma_{nm}}{\partial\rho\partial R} -$$

$$-\frac{i}{2}\xi^-_{nm}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\right]\Gamma_{nm} = -\frac{1}{2}\Big(\sum_n A_{nn'}(0,\omega_1)\Gamma_{n'm} +$$

$$+\sum_{m'} A_{m'm}(0,\omega_2)\Gamma_{nm'}\Big) + \sum_{n'}\sum_{m'} A^{mm'}_{nn'}(\rho;\omega_1,\omega_2)\Gamma_{n'm'}. \qquad (6)$$

При написании (6) использованы обозначения:

$$\xi^+_{nm} = \frac{1}{2}\left(\varkappa_n^{-1}(\omega_1) + \varkappa_m^{-1}(\omega_2)\right), \quad \xi^-_{nm} = \varkappa_n^{-1}(\omega_1) - \varkappa_m^{-1}(\omega_2);$$

$$A^{mm'}_{nn'}(\rho;\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\langle \mu_{nn'}(0,0,\omega_1)\,\mu_{mm'}(x,\rho,\omega_2)\,e^{i(\varkappa_{nm}-\varkappa_{n'm'})x}\rangle$$

$$\varkappa_{nm} = \frac{1}{2}\left(\varkappa_n(\omega_1) + \varkappa_m(\omega_2)\right), \quad A_{nn'}(0,\omega_1) = \sum_{m'} A^{n'm'}_{nm'}(0,\omega_1,\omega_1).$$

Условиями применимости системы (6) помимо неравенств (3) являются требования $x \gg \lambda_n, \rho$; $x < l_{nm}(l_1/\lambda_n)^4$, $\delta_n \ll \Lambda_n^{-1}$, $l_\perp^{-1}$, где $l_{nm} = 2\pi/|\varkappa_n - \varkappa_m|$ — горизонтальный интерференционный масштаб, $\Lambda_n = l_{n+1n}$ — длина цикла, $\sigma_n(\omega) = \sum_m A^{nm}_{nm}(0,\omega,\omega)$ — коэффициент объемного рассеяния, определяющий затухание интенсивности когерентного поля моды номера n.

Заметим, что при $\omega_1 = \omega_2$ (6) переходит в уравнение, описывающее интерференционную структуру акустического поля, возбуждаемого тональным источником, которое исследовалось в ряде работ (см., например, [6—8]).

В общем случае анализ уравнения (6) чрезвычайно сложен и требует привлечения численных методов. Ниже ограничимся изучением усредненных (по интерференционной структуре) энергетических характеристик импульсного излучения, при этом основным объектом исследования являются функции Γ_{nn}, описывающие частотную корреляцию средних интенсивностей мод. Для узкополосного сигнала, когда разностная частота $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ много меньше несущей частоты ω_0, а $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \approx \omega_0$, так что

$$\varkappa_n(\omega_1) - \varkappa_n(\omega_2) \approx \frac{1}{v_n}\Omega, \quad \xi^+_{nn} \approx \varkappa_n^{-1}(\omega_0), \quad \xi^-_{nn} \approx \Omega/2v_n\varkappa_n^2(\omega_0),$$

где $v_n = \partial\omega/\partial\varkappa_n|_{\omega=\omega_0}$ — групповая скорость и $\varphi_n(z,\omega_{1,2}) \approx \varphi_n(z,\omega_0)$, для величин Γ_{nn} из (6) нетрудно получить

$$\frac{\partial\Gamma_{nn}}{\partial x} - i\Omega\frac{1}{v_n}\Gamma_{nn} - \frac{i}{\varkappa_n}\frac{\partial^2\Gamma_{nn}}{\partial\rho\partial R} + \frac{i\Omega}{2v_n\varkappa_n^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\right]\Gamma_{nn} =$$

$$= -\sigma_n\Gamma_{nn} + \sum_m a_{nm}(\rho)\Gamma_{mm} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\sigma_n\Gamma_{nn}. \qquad (7)$$

Здесь

$$a_{nm}(\rho) = A^{nm}_{nm}(\rho,\omega_0,\omega_0) = \frac{2\pi k^4}{\varkappa_n\varkappa_m}\int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa_y F^{nm}_\mu(\varkappa_n - \varkappa_m, \varkappa_y)\,e^{i\varkappa_y\rho},$$

где

$$F^{nm}_\mu(\varkappa) = \int_0^H dz_1\int_0^H dz_2\, n_0(z_1)\,n_0(z_2)\,F_\mu(\varkappa; z_1, z_2)\,\varphi_n(z_1)\,\varphi_m(z_1)\,\varphi_n(z_2)\,\varphi_m(z_2),$$

в которой

$$F_\mu(\varkappa, z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho B_\mu(\rho, z_1, z_2)\, e^{-i\varkappa\rho}$$

— двумерный спектр флуктуаций, $\varkappa = (\varkappa_x, \varkappa_y)$ — волновой вектор в горизонтальной плоскости;

$$\sigma_n = \sum_m a_{nm}(0).$$

Уравнение (7) является исходным для последующего анализа.

Прежде всего обратим внимание, что в пренебрежении членом $\frac{i\Omega}{2v_n\varkappa_n^2}\frac{\partial^2\Gamma_{nn}}{\partial\rho^2}$, описывающим дифракционные явления для величины

$$W_n(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dR \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Omega\Gamma_{nn}(x, \rho = 0, R, \Omega)\, e^{-i\Omega t}$$

из (7) (без учета последнего слагаемого) следует

$$\frac{\partial W_n}{\partial x} + \frac{1}{v_n}\frac{\partial W_n}{\partial t} \sum_m a_{nm}(0)\,[W_m - W_n]. \tag{8}$$

Приведенное уравнение представляет собой хорошо известное нестационарное уравнение переноса для средних мощностей мод, исследованное в [9, 10] применительно к задаче о распространении импульсного светового сигнала через нерегулярный оптический волновод. (В рамках лучевого подхода диффузионный аналог (8) выведен в [11].) В частности, в указанных работах найдено асимптотическое выражение для $W_n(x, t)$ при $x \to \infty$.

Ниже, исходя из (7), получим приближенное аналитическое решение рассматриваемой задачи как при малых значениях x, так и в области $x \to \infty$ обобщив результаты [9—11] на случай, когда дифракционные эффекты являются существенными.

Вначале рассмотрим распространение импульсного сигнала на относительно короткой дистанции, когда когерентная интенсивность преобладает над некогерентной. В этом случае, полагая

$$\Gamma_{nn}(x, \rho, R, \Omega) = I_n(x, \rho, R, \Omega)\, e^{i\Omega\frac{x}{v_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\sigma_n x}, \tag{9}$$

для I_n приближенно имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{\varkappa_n}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial R} + \frac{i\Omega}{2v_n\varkappa_n^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\right)\right] I_n =$$
$$= -\sigma_n I_n + \sum_m a_{nm}(\rho)\, e^{i\Omega\bar{v}_{nm}x} I_m, \tag{10}$$

где

$$\bar{v}_{nm} = v_m^{-1} - v_n^{-1}.$$

Для отыскания решения системы (10) при произвольных начальных данных $I_n(x = 0, \rho, R, \Omega) = I_n^{00}(\rho, R, \Omega)$ введем в рассмотрение матричную функцию Грина $G_{nm}(x; \rho, R; \rho', R', \Omega)$, подчиняющуюся уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{\varkappa_n}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial R} + \frac{i\Omega}{2v_n\varkappa_n^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\right)\right] G_{nm} =$$
$$= -\sigma_n G_{nm} + \sum_\nu a_{n\nu}(\rho)\, e^{i\Omega\bar{v}_{n\nu}x} G_{\nu m}, \tag{11}$$

$$G_{nm}(x = 0, \rho, R; \rho', R', \Omega) = \delta_{nm}\delta(\rho - \rho')\,\delta(R - R').$$

Знание G_{nm} из (11) позволяет определить искомые функции I_n посредством

$$I_n(x, \rho, R, \Omega) = \sum_m \iint_{-\infty}^{\infty} d\rho' dR' G_{nm}(x; \rho, R; \rho', R', \Omega) I_m^{00}(\rho', R'). \quad (12)$$

При построении приближенного решения задачи (11) будем исходить из предположения, что при рассеянии на крупномасштабных неоднородностях наиболее эффективно взаимодействуют моды с номерами n и m, удовлетворяющие неравенству $|(n-m)/m| \ll 1$ [5, 12]. Для таких значений n и m коэффициент межмодовой трансформации a_{nm} зависит в основном от разности $n-m$, что позволяет упростить (11).

При нахождении G_{nm} воспользуемся процедурой, являющейся матричным аналогом метода плавных возмущений [7]. В рамках указанного подхода решение (11) ищется в виде

$$G_{nm}(x, \rho, R; \rho', R') = \sum_{m'} H_{nm'}(x, \rho, \rho') G_{m'm}^{(0)}(x; \rho - \rho', R - R'), \quad (13)$$

где

$$G_{m'm}^{(0)}(x, \rho, R, \Omega) =$$

$$= \delta_{m'm} \frac{\varkappa_m}{2\pi x \sqrt{1-\varepsilon_m^2}} \exp\left\{ i \frac{\varkappa_m}{x(1-\varepsilon_m^2)} \left[\rho R + \varepsilon_m \left(R^2 + \frac{1}{4}\rho^2 \right) \right] \right\} \quad (14а)$$

— невозмущенная функция Грина, описывающая поле излучения в регулярном канале, $\varepsilon_m = \Omega/2v_m\varkappa_m$, а величина H_{nm} определяется выражением

$$H_{nm}(x, \rho, \rho', \Omega) = \int_0^1 d\alpha \exp\{-2\pi i(n-m)\alpha + \psi_m(x, \rho, \rho', \alpha, \Omega)\}, \quad (14б)$$

в котором ψ_m представляется рядом теории возмущений по степеням интенсивности флуктуаций: $\psi_m = \psi_m^{(1)} + \psi_m^{(2)} + \ldots$ и удовлетворяет условию $\psi_m(x=0) = 0$.

Подставляя (13) в (11) (с учетом (14)) и ограничиваясь первым порядком теории возмущений, для $\psi_m^{(1)}$ нетрудно получить

$$\psi_m^{(1)}(x, \rho, \rho', \alpha, \Omega) = \sum_{n'} \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa_y \psi_{n'm}(x, \rho; x', \rho', \alpha, \Omega, \varkappa_y), \quad (15)$$

где

$$\psi_{nm} = a_{nm}(\varkappa_y) \left\{ 1 - e^{2\pi i(n-m)\alpha} \exp\left[\frac{i}{2} \varkappa_y^2 \Omega \frac{x'(x-x')}{x v_m \varkappa_m^2} + i v_{nm}^- \Omega x' + i\varkappa_y \bar{\rho} \right] \right\},$$

$$a_{nm}(\varkappa_y) = \frac{2\pi k^4}{\varkappa_n \varkappa_m} F_\mu^{nm}(\varkappa_n - \varkappa_m, \varkappa_y), \quad \bar{\rho} = \rho' + (\rho - \rho') \frac{x'}{x}.$$

Формулы (9), (12)—(15) дают общее решение задачи о поведении двухчастотной функции корреляции поля на начальных участках трассы.

Займемся теперь отысканием асимптотического ($x \to \infty$) решения задачи (7). С этой целью воспользуемся диффузионным подходом и для простоты ограничимся случаем распространения плоской импульсной волны ($\partial/\partial R = 0$). В диффузионном приближении уравнение (7) можно привести к виду

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\Omega}{v_n} \left(1 + \frac{1}{2} s^2 \right) \right] J_n(x, s, \Omega) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial n} D_n \frac{\partial J_n}{\partial n}(x, s, \Omega) + d_s \frac{\partial^2 J_n}{\partial s^2}(x, s, \Omega), \quad (16)$$

где величина

$$J_n(x, s, \Omega) = \frac{\varkappa_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho' \Gamma_{nn}(x, \rho, \Omega) e^{-i\varkappa_n s\rho} \quad (17)$$

имеет смысл спектральной интенсивности n-й моды, а коэффициенты D_n и d_s определяются посредством

$$D_n = \frac{1}{2}\sum_m (n-m)^2 a_{nm}(0), \quad d_s = -\frac{1}{2\varkappa_n^2}\sum_m \frac{\partial^2 a_{nm}(\rho)}{\partial\rho^2}\bigg|_{\rho=0}.$$

При написании (16) опущено слагаемое $0{,}5\,(\Omega/\omega_0)^2\sigma_n J_n$, определяющее ширину полосы когерентности в геометрооптическом приближении [1], которое при $x \to \infty$ является несущественным.

Для учета эффектов, связанных с рассеянием акустической энергии за пределы углов, удерживаемых подводным звуковым каналом, уравнение (16) необходимо дополнить следующими граничными условиями [12]:

$$D_n \frac{\partial J_n}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad n = 1; \quad J_n = 0 \quad \text{при} \quad n = M.$$

Далее, от переменной n удобно перейти к углу скольжения $\theta_n = \arccos(\varkappa_n/k)$, составляемому бриллюэновской волной с осью канала. Тогда оператор $(\partial/\partial n)\, D_n\, (\partial/\partial n)$ может быть представлен в виде угловой части оператора Лапласа [13]:

$$\frac{\partial}{\partial n} D_n \frac{\partial}{\partial n} \to \hat{s} = \frac{1}{\Lambda_n}\frac{1}{\sin\theta_n}\frac{\partial}{\partial\theta_n}\left(d_v \sin\theta_n \frac{\partial}{\partial\theta_n}\right),$$

где $d_\vartheta = (2\pi)^2(k^2\Lambda_n \sin^2\theta_n)^{-1} D_n$. В результате (16) перепишется так:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\Omega}{v_n}\left(1 + \frac{1}{2}s^2\right)\right] J_n = \hat{s} J_n + d_s \frac{\partial^2 J_n}{\partial s^2}, \tag{18}$$

$\sin\theta_n \dfrac{\partial J_n}{\partial\theta_n} = 0$ при $\theta_n = 0$; $J_n = 0$ при $\theta_n = \theta_{cr}$ (θ_{cr} — критический угол волновода).

Решение уравнения (18) будем искать методом разделения переменных

$$J_n(x, s, \Omega) = \sum_{j=1}^{\infty} R_j(x, s, \Omega) F_j(\theta_n), \tag{19}$$

где $F_j(\theta_n)$ — собственные функции оператора $\hat{s}$: $\hat{s}F_j(\theta_n) + \Gamma_j F_j(\theta_n) = 0$, отвечающие собственным значениям Γ_j.

Предполагается, что собственные функции являются ортонормированными с некоторым весом $f(\theta_n)$, т. е.

$$\int_0^{\theta_{cr}} f(\theta_n) F_i(\theta_n) F_j(\theta_n)\, d\theta_n = \delta_{ij},$$

а собственные значения перенумерованы в порядке их возрастания: $0 < \Gamma_1 < \Gamma_2 < \Gamma_3 < \ldots$. Подстановка (19) в (18) дает

$$\frac{\partial R_j}{\partial x} - i\Omega \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2}s^2\right) M_{jk} R_k = -\Gamma_j R_j + \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk}\frac{\partial^2 R_k}{\partial s^2},$$

$$M_{jk} = \int_0^{\theta_{cr}} f(\theta_n)\frac{1}{v_n} F_j(\theta_n) F_k(\theta_n)\, d\theta_n; \quad d_{jk} = \int_0^{\theta_{cr}} f(\theta_n)\, d_s F_j(\theta_n) F_k(\theta_n)\, d\theta_n. \tag{20}$$

На достаточно больших трассах (при $x > (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{-1}$) основной вклад в сумму (19) вносит гармоника с $j = 1$, характеризуемая наименьшим коэффициентом затухания. Полагая

$$R_1(x, s, \Omega) = P_1(x, s, \Omega)\, e^{-\Gamma_1 x + i\frac{\Omega}{v_э}x}, \tag{21}$$

где $1/v_э = M_{11}$ для P_1 из (20) приближенно имеем

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{i\Omega}{2v_э} s^2 P_1 - d_э = \frac{\partial^2 P_1}{\partial s^2} = i\Omega \sum_{k=2}^{\infty} M_{1k}\left(1 + \frac{1}{2} s^2\right) e^{(\Gamma_1 - \Gamma_k)x} P_k, \quad d_э = d_{11}. \tag{22}$$

Начальное условие для $P_1(x, s, \Omega)$ имеет вид $P_1(x = 0, s, \Omega) = I_1^{00}\delta(s)$, где I_1^{00} выражается через заданные на входе коэффициенты возбуждения A_n:

$$I_1^{00} = \int_0^{\theta_{cr}} f(\theta_n) A_n^2 F_1(\theta_n)\, d\theta_n.$$

Для большинства реальных ситуаций групповые скорости мод v_n подводного звукового канала довольно слабо зависят от номера n.

Это обстоятельство позволяет считать величину M_{1k} при $k > 1$ малым параметром задачи и при решении (22) (следуя идее работ [9, 10]) воспользоваться теорией возмущений по M_{1k}. В нулевом приближении по M_{1k} решение уравнения (22) дается выражением

$$P_1^{(0)}(x, s, \Omega) = \\ = I_1^{00} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(4ia)^{1/4}}{\sqrt{\sin((4ia)^{1/2} d_э x)}} \exp\left(-s^2 \sqrt{\frac{ia}{4}} \operatorname{ctg}(\sqrt{4ia}\, d_э x)\right), \tag{23}$$

где $a = \Omega/2d_э v_э$.

В частности, для $P_1^{(0)}(x, \rho = 0, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1^{(0)}(x, s, \Omega)\, ds$ из (23) следует

$$P_1^{(0)}(x, \rho = 0, \Omega) = I_1^{00} \frac{1}{\sqrt{\cos((4ia)^{1/2} d_э x)}}. \tag{24}$$

Вычисление поправок к (24) методом возмущений аналогично тому, как это сделано в [9, 10], при $x > (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{-1}$ приводит к результату

$$P_1(x, \rho = 0, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{\cos((4ia)^{1/2} d_э x)}} e^{-\frac{1}{2}\Omega^2 \Delta_\tau^2}, \tag{25}$$

$$\Delta_\tau^2 = 2x \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M_{1k}^2}{\Gamma_k - \Gamma_1}\left(1 + d_э x + \frac{1}{3} d_э^2 x^2\right).$$

При $d_э = 0$ из (25) вытекает соответствующая формула работ [9, 10].

Займемся теперь вычислением некоторых практически важных интегральных характеристик поля излучения. Для этого отметим [2], что интенсивность выходного узкополосного сигнала (4) может быть выражена через интенсивность входного импульса

$$I_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 g(\omega_1) g^*(\omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}$$

с помощью свертки

$$B_p(x, \rho, R, z_1, z_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(x, \rho, R, z_1, z_2, t - t') I_i(t'), \tag{26}$$

где $G(\cdot)$ — отклик на входной дельта-импульс, представляющий собой фурье-образ двухчастотной функции когерентности

$$G(x, \rho, R, z_1, z_2, t) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Gamma(x, \rho, R, z_1 z_2, \Omega) e^{-i\Omega t}. \tag{27}$$

Далее нас будет интересовать средняя энергия сигнала

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle | p(\mathbf{r}, z, t) |^2 \rangle,$$

время прихода «центра тяжести» $\bar{t}$

$$\bar{t} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} dtt \langle | p(\mathbf{r}, z, t) |^2 \rangle$$

и его нормированная дисперсия

$$\overline{(\Delta t)^2} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} dt (t - \bar{t})^2 \langle | p(\mathbf{r}, z, t) |^2 \rangle.$$

Указанные величины с помощью (26), (27) представимы в виде

$$E = [\Gamma]_{\substack{\Omega=0,\\ \rho=0}} E_0, \quad \bar{t} = -i \left[\frac{d \ln \Gamma}{d\Omega} \right]_{\substack{\Omega=0,\\ \rho=0}}; \quad \overline{(\Delta t)^2} = -\left[\frac{d^2 \ln \Gamma}{d\Omega} \right]_{\substack{\Omega=0,\\ \rho=0}}, \tag{28}$$

где $E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dt I_i(t)$ — полная энергия излучаемого импульса.

Таким образом, для нахождения временных моментов регистрируемого поля величину Γ нужно продифференцировать по Ω, следуя формулам (28).

На начальных участках трассы, привлекая соотношения (9), (12)—(15) для плоской падающей волны ($I_n^{00}(\rho, R, \Omega) - A_n^2$, где A_n — коэффициент возбуждения), имеем

$$\Gamma(x, \rho = 0, \Omega = 0) = \sum_n \frac{1}{\varkappa_n} A_n^2 \varphi_n^2(z), \tag{29}$$

$$\bar{t} = \sum_n \sum_m \rho_{nm} \bar{t}_{nm}; \; \overline{(\Delta t)^2} = (\Delta \tau_3)^2 + \sum_n \sum_m \rho_{nm} \overline{(\Delta t_{nm}^2)}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$\rho_{nm} = \frac{1}{\varkappa_n} \varphi_n^2(z) A_m^2 \Big/ \sum_n \frac{1}{\varkappa_n} A_n^2 \varphi_n^2(z),$$

$$(\Delta \tau_3)^2 = \frac{1}{2} x^2 \sum_n \sum_m \rho_{nn} \rho_{mm} \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_n} \right)^2,$$

$$\bar{t}_{nm} = \frac{x}{v_n} \left(\delta_{nm} + \frac{1}{4} \langle \alpha_{nm}^2 \rangle x \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_n} \right) a_{nm}(0) x^2, \tag{30}$$

$$\overline{(\Delta t_{nm}^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \sigma_n x \delta_{nm} + \frac{1}{12} \frac{x^3}{v_n^2} \langle \alpha_{nm}^4 \rangle + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_n} \right)^2 a_{nm}(0) x^3,$$

где

$$\langle \alpha_{nm}^{2p} \rangle = (-1)^p \frac{1}{\varkappa_n^{2p}} \frac{\partial^{2p} a_{nm}(\rho)}{\partial \rho^{2p}} \Big|_{\rho=0} \quad (p = 1, 2).$$

Отметим, что $\Delta\tau_3$ определяет время затягивания импульсного сигнала в регулярном волноводе из-за межмодовой дисперсии; величина $\langle \tau_n^2 \rangle = \frac{1}{\omega_0^2} \sigma_n x$ представляет собой дисперсию времени прихода моды номера n, а слагаемое $\langle \alpha_n^2 \rangle = \sum_m \langle \alpha_{nm}^2 \rangle x$ имеет смысл дисперсии угла прихода модового луча в горизонтальной плоскости. (Примеры расчета дисперсий углов и времени прихода звукового сигнала в геометрооптическом приближении для канонической модели канала и спектра Гаррета-Манка, описывающего случайное поле внутренних волн, приведены в [1, 14].)

Полученные зависимости временных параметров акустического импульса от дистанции в основных чертах согласуются с результатами расчета характеристик светового нестационарного пучка в мутной среде [15].

Следует подчеркнуть, что соотношения (29), (30) в силу приближенного характера их вывода имеют ограниченную область применимости. В процессе получения формул (29), (30) величины $\bar{t}$ и $\overline{(\Delta t)^2}$ выражались через функции $[\partial\psi_m/\partial\Omega]_{\Omega=0}$ и $[\partial^2\psi_m/\partial\Omega^2]_{\Omega=0}$, причем ψ_m рассчитывалась в первом порядке теории возмущений. Оценка следующих членов теории возмущений показывает, что относительная ошибка в определении $\bar{t}$ и $\sqrt{\overline{(\Delta t^2)}}$ по формулам (29), (30) составляет величину порядка

$$100x \sum_n \sum_m \rho_{nm} \left[\frac{1}{2} \langle \alpha_{nm}^2 \rangle + \left(\frac{v_m - v_n}{v_n} \right) a_{nm}(0) \right] \% .$$

При $\bar{x} > (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{-1}$, используя (17), (21), (25), для интересующих нас характеристик получим

$$\Gamma(x, \rho = 0, \Omega = 0) = \sum_n \frac{1}{\varkappa_n} \varphi_n^2(z) I_1^{00} F_1(\theta_n) e^{-\Gamma_1 x},$$

$$\bar{t} = \frac{x}{v_э} \left(1 + \frac{1}{2} d_э x \right), \tag{31}$$

$$\overline{(\Delta t^2)} = \frac{1}{3} d_э^2 \frac{x^2}{v_э^2} + \Delta_\tau^2.$$

Как видно из (31), в установившемся состоянии интегральные параметры импульсного сигнала не зависят от начальных условий и описываются универсальными зависимостями. Расчет величин $d_э$ и Δ_τ^2 для конкретных моделей спектров океанических неоднородностей будет проведен в отдельной работе.

Автор выражает признательность Л. С. Долину за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. Флатте С. М.: Мир, 1982. 336 с.
2. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981. 318 с.
3. *Kohler W. E.* Pulse propagation in a randomly perturbed ocean: Single pulse statistics // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68. № 4. P. 1177—1183.
4. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978. 464 с.
5. *Сазонтов А. Г., Фарфель В. А.* Об однократном рассеянии акустического сигнала на внутренних волнах в подводном звуковом канале // Акуст. журн. 1986. Т. 31. № 5. С. 635—641.
6. *Долин Л. С., Нечаев А. Г.* Модовое описание интерференционной структуры акустического поля в волноводе со статистически неровной стенкой // Изв. вузов. Радиофизика, 1981. Т. 24. № 11. С. 1337—1341.
7. *Моисеев А. А.* О расчете функции когерентности поля в случайно-неоднородном волноводе // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 6. С. 1339—1344.
8. *Нечаев А. Г.* Затухание интерференционной структуры акустического поля в океане со случайными неоднородностями // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 3. С. 535—538.
9. *Marcuse D.* Theory of dielectric optical wavequides. N. Y.: Academic Press, 1974. 275 p.
10. *Olshansky R.* Mode coupling effects in graded-index optical fibers // Applied Opt. 1975. V. 14. № 4. P. 935—945.
11. *Шатров А. Д.* Статистика лучей в многомодовых нерегулярных оптических волокнах // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 8. С. 1153—1163.
12. *Колер В., Папаниколау Дж. К.* Распространение волн в случайно-неоднородном океане // Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Келлера Дж. Б. и Пападакиса Дж. С. М.: Мир, 1980. С. 126—179.
13. *Сазонтов А. Г., Фарфель В. А.* К расчету затухания низкочастотного звука в океане при рассеянии на внутренних волнах // Акуст. журн. 1986. Т. 27. № 4. С. 492—498.
14. *Сазонтов А. Г., Фарфель В. А.* Дисперсии углов прихода и боковых смещений лучей в океаническом волноводе с флуктуациями показателя преломления, обусловленными внутренними волнами // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 507—515.
15. *Долин Л. С.* Решение уравнения переноса излучения в малоугловом приближении для стратифицированной мутной среды с учетом разброса фотонов по пробегам // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 1. С. 55—74.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23.II.1988