АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 5.

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ВРАЩАЮЩИМСЯ СФЕРОИДОМ

Родионова Г. А., Толоконников Л. А.

Рассматривается задача рассеяния плоской звуковой волны жидким сфероидом, вращающимся с постоянной угловой скоростью внутри неподвижной однородной жидкости. Найдено акустическое поле внутри и вне сфероида.

Исследованию рассеяния звуковых волн вращающимися жидкими телами цилиндрической и сферической формы посвящены работы [1, 2]. В данной работе рассмотрим задачу рассеяния звуковых волн жидким сфероидом, вращающимся с постоянной угловой скоростью σ внутри неподвижной однородной жидкости.

Полагаем, что плоская волна давления p_p единичной амплитуды с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ падает на вращающийся сфероид (для определенности вытянутый) под углом θ_0 к его оси вращения и азимутальным углом φ_0. Без ограничения общности, можно положить $\varphi_0 = 0$. Определим акустическое поле внутри и вне сфероида.

Для возмущенной среды представим скорость частиц жидкости $\mathbf{V}$, давление p и плотность ρ внутри вращающейся жидкости в виде $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{V}_0$; $p = p_в + p_0$; $\rho = \rho_1(1 + s)$. Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{V}_0$ — скорости частиц жидкости, обусловленные соответственно акустическим возмущением и вращением; $p_в$ — акустическое давление во вращающейся среде; p_0 — давление невозмущенной вращающейся среды; ρ_1 — плотность вращающейся невозмущенной жидкости; s — сжатие. При этом $p_0 = 0{,}5\rho_1\sigma^2 l^2$, где l — расстояние вращающейся частицы жидкости от оси вращения.

Уравнения движения и неразрывности для вращающейся среды будут иметь вид [1, 2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_0\nabla\right)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{V}_0 = -\rho_1^{-1}\nabla p_в; \tag{1}$$

$$\frac{1}{c_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_0\nabla\right)p_в + \rho_1\nabla\mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

где c_1 — скорость звука внутри сфероида.

При получении уравнений (1), (2) отбрасывались члены второго порядка малости по величинам $\mathbf{u}$, $p_в$, s, а также величины порядка $(\sigma^2/\omega^2)(k_1 a)$ (здесь ω — круговая частота; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число; a — характерный размер сфероида).

Для решения задачи введем неподвижную систему вытянутых сфероидальных координат ξ, η, φ с началом в центре сфероида [3]. Уравнения (1), (2) в этой системе принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_\xi}{\partial t} + \sigma\frac{\partial u_\xi}{\partial\varphi} - 2\frac{\sigma}{h_\xi}\frac{\partial h_\varphi}{\partial\xi}u_\varphi = -\frac{1}{\rho_1 h_\xi}\frac{\partial p_в}{\partial\xi};\\
\frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \sigma\frac{\partial u_\eta}{\partial\varphi} - 2\frac{\sigma}{h_\eta}\frac{\partial h_\varphi}{\partial\eta}u_\varphi = -\frac{1}{\rho_1 h_\eta}\frac{\partial p_в}{\partial\eta};\\
\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{2u_\xi\sigma\xi d}{h_\eta} - \frac{2u_\eta\sigma\eta d}{h_\xi} + \sigma\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} = -\frac{1}{\rho_1 h_\varphi}\frac{\partial p_в}{\partial\varphi};\\
\frac{1}{c_1^2}\left(\frac{\partial p_в}{\partial t} + V_{0\varphi}\frac{1}{h_\omega}\frac{\partial p_в}{\partial\varphi}\right) + \rho_1\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi}\frac{\partial(u_\xi h_\eta h_\varphi)}{\partial\xi} +\\
+ \frac{\partial(u_\eta h_\varphi h_\xi}{\partial\eta} + \frac{\partial(u_\varphi h_\varphi h_\eta)}{\partial\varphi}\Big) = 0,
\end{gathered} \tag{3}$$

где u_ξ, u_η, u_φ—компоненты скорости u в сфероидальной системе координат; h_ξ, h_η, h_φ — коэффициенты Ламе сфероидальной системы координат; d — половина межфокусного расстояния сфероида. Компоненты скорости V_0 в сфероидальной системе координат определяются выражениями $V_{0\xi} = 0$; $V_{0\eta} = 0$; $V_{0\varphi} = \sigma h_\varphi$. Зависимость от времени величин u_ξ, u_η, u_φ, $p_в$ определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, который в дальнейшем опускаем. Компоненты скорости $\mathbf{u}$ и давление $p_в$ являются периодическими функциями угла φ с периодом 2π. Следовательно, можем считать, что зависимость от угла φ определяется множителем $\exp(-im\varphi)$. В результате из первых трех уравнений системы (3) получаем следующие соотношения:

$$u_{\xi m} = -\frac{1}{\rho_1 M}\left[\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial p_{вm}}{\partial \xi} - \frac{2im\sigma\xi d}{h_\eta h_\varphi M} p_{вm}\right];$$

$$u_{\eta m} = -\frac{1}{\rho_1 M}\left[\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial p_{вm}}{\partial \eta} + \frac{2im\sigma\eta d}{h_\xi h_\varphi M} p_{вm}\right]; \tag{4}$$

$$u_{\varphi m} = \frac{1}{\rho_1 M^2}\left[\frac{imM}{h_\varphi} p_{вm} + \frac{2\sigma d\xi}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial p_{вm}}{\partial \xi} - \frac{2\sigma\eta d}{\eta_\xi h_\eta}\frac{\partial p_{вm}}{\partial \eta}\right],$$

где $M = -i(\omega + m\sigma)$.

При получении выражений (4) полагали, что $\sigma^2/\omega^2 \ll 1$. Подставляя выражения (4) в четвертое уравнение системы (3), получаем для определения величин $p_{вm}$ уравнение

$$(\xi^2 - 1)\frac{\partial^2 p_{вm}}{\partial \xi^2} + (1 - \eta^2)\frac{\partial^2 p_{вm}}{\partial \eta^2} + 2\xi\frac{\partial p_{вm}}{\partial \xi} -$$

$$- 2\eta\frac{\partial p_{вm}}{\partial \eta} - \left[\frac{d^2(\xi^2 - \eta^2)M^2}{c_1^2} + \frac{m^2(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\right] p_{вm} = 0.$$

Это уравнение может быть решено методом разделения переменных. Его решение представляется в виде произведения радиальных и угловых сфероидальных функций. Тогда с учетом условия ограниченности давление внутри вращающегося сфероида будем искать в виде

$$p_в = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_{вm}, \tag{5}$$

где

$$p_{вm} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} S_{mn}(q_m, \eta) R_{mn}^{(1)}(q_m, \xi) e^{-im\varphi}.$$

Здесь $S_{mn}(q_m, \eta)$— угловая сфероидальная функция первого рода; $R_{mn}^{(1)}(q_m, \xi)$ — радиальная сфероидальная функция первого рода; $q_m = d(\omega + m\sigma)/c_1$.

Во внешней среде давление в рассеянной волне p_s удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p_s + \frac{\omega^2}{c_2^2} p_s = 0,$$

где c_2 — скорость звука во внешней среде. С учетом условия излучения на бесконечности давление p_s будем искать в виде

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{mn} S_{mn}(h, \eta) R_{mn}^{(3)}(h, \xi) e^{-im\varphi}, \tag{6}$$

где $R_{mn}^{(3)}(h, \xi)$ — радиальная сфероидальная функция третьего рода; $h = k_2 d$; $k_2 = \omega/c_2$ — волновое число внешней среды. Искомые функции p_s и $p_в$ должны удовлетворять на поверхности сфероида $\xi = \xi_0$ следующим граничным условиям [2]:

$$(p_s + p_p)|_{\xi=\xi_0} = p_в|_{\xi=\xi_0}, \tag{7}$$

$$-\left.\frac{u_\xi}{i(\omega + m\sigma)}\right|_{\xi=\xi_0} = -\left.\frac{v_\xi}{i\omega}\right|_{\xi=\xi_0}, \tag{8}$$

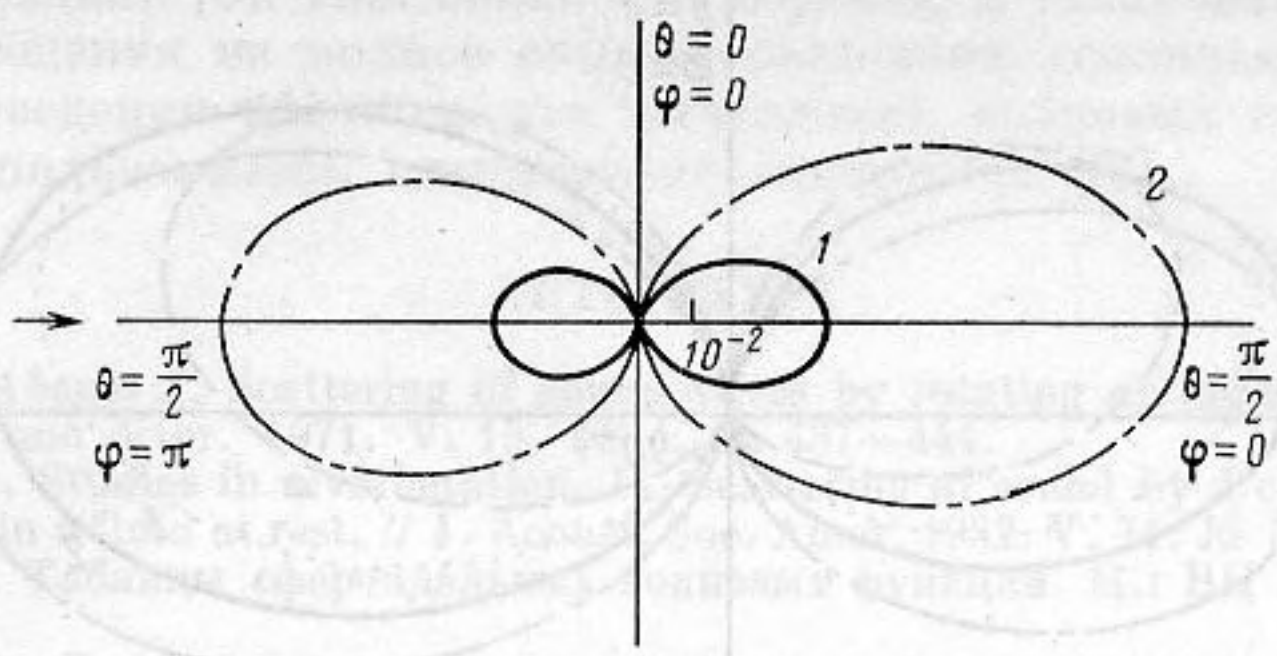

Рис. 1. Диаграмма направленности рассеянного поля:
1 — $\sigma/\omega = 0{,}03$, *2* — $\sigma/\omega = 0{,}05$

где v_ξ — нормальная составляющая скорости частиц жидкости неподвижной среды. При этом

$$v_\xi = \frac{1}{i\rho_2\omega h_\xi}\frac{\partial(p_p + p_s)}{\partial\xi}, \tag{9}$$

где ρ_2 — плотность неподвижной среды. Отметим, что давление в падающей волне представляется разложением [4]:

$$p_p = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} i^n \frac{S_{mn}(h, \eta_0)}{N_{mn}(h)} S_{mn}(h, \eta)\, R_{mn}^{(1)}(h, \xi)\, e^{-im\varphi}, \tag{10}$$

где $\eta_0 = \cos\theta_0 \sqrt{(\xi^2 - 1)/(\xi^2 - \cos^2\theta)}$; $N_{mn}(h)$ — нормирующий множитель угловых сфероидальных функций.

Кроме того, на основании первого из выражений (4) имеем

$$u_\xi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho_1 M}\left(-\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial p_{вm}}{\partial\xi} + \frac{2im\sigma\xi\, d}{h_\eta h_\varphi M}\, p_{вm}\right). \tag{11}$$

Подставим разложения (5), (6), (10) в граничные условия (7) и (8), учитывая выражения (9), (11). В результате для нахождения неизвестных коэффициентов B_{mn} получим бесконечную систему уравнений вида

$$\sum_{n=|m|}^{\infty} \alpha_{mln} B_{mn} = f_{ml}, \tag{12}$$

$$(m = 0, \pm 1, \ldots; \quad l = |m|, |m| + 1 \ldots),$$

где

$$\alpha_{mln} = \{T_{mln}[R_{mn}^{(1)}(q_m, \xi_0)/R_{ml}^{(3)}(h, \xi_0) - (E_1 R_{mn}^{(1)\prime}(q_m, \xi_0) +$$
$$+ E_2 R_{mn}^{(1)}(q_m, \xi_0))/R_{ml}^{(3)\prime}(h, \xi_0)]/N_{ml}(h)\};$$

$$f_{ml} = b_{ml}[R_{ml}^{(1)}(h, \xi_0)/R_{ml}^{(3)}(h, \xi_0) - R_{ml}^{(1)\prime}(h, \xi_0)/R_{ml}^{(3)\prime}(h, \xi_0)];$$

$$b_{ml} = 2i^n S_{ml}(h, \eta_0)/N_{mn}(h); \quad E_1 = \rho_1\omega^2/\rho_1 M^2;$$

$$E_2 = \frac{2\rho_2 m\sigma\xi_0\omega^2}{\rho_1 M^3(\xi_0^2 - 1)}; \quad T_{mln} = \int_{-1}^{1} S_{mn}(q_m, \eta)\, S_{ml}(h, \eta)\, d\eta.$$

Решение бесконечной системы уравнений (12) может быть найдено методом усечения. Фиксируя m, данную систему сводим к последовательности линейных бесконечных систем, каждая из которых решается методом усечения [5]. При выбранном порядке усечения N система (12) приводится к $2N + 1$ системе уравнений, каждая из которых состоит из $N - |m| + 1$ уравнений с $N - |m| + 1$ неизвестными. Сопоставляя последовательные приближения решений полученных систем для различных возрастающих значений N, находим решение системы (12) с заданной наперед точностью.

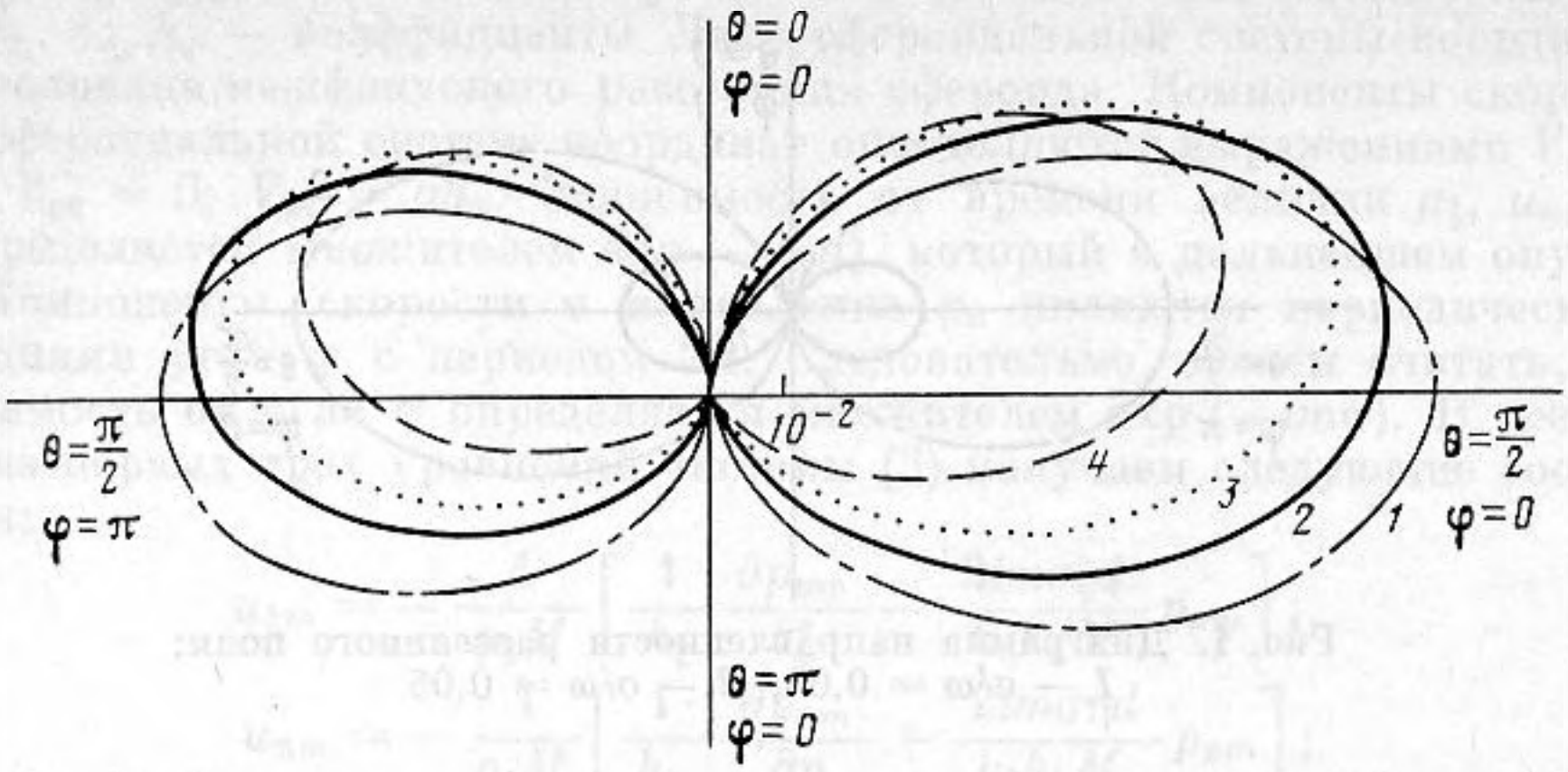

Рис. 2. Диаграмма направленности рассеянного поля: *1* — $\theta_0 = \pi/2$, *2* — $\theta_0 = \pi/3$, *3* — $\theta_0 = \pi/4$, *4* — $\theta_0 = \pi/6$

Определив неизвестные коэффициенты B_{mn}, находим коэффициенты A_{mn}:

$$A_{mn} = \Big[\sum_{l=0}^{N} (B_{ml} R_{ml}^{(1)}(q_m, \xi_0) T_{mln}) - N_{mn}(h)\, b_{mn} R_{mn}^{(1)}(h, \xi_0)\Big] \Big/ N_{ml}(h)\, R_{ml}^{(3)}(h, \xi_0),$$

где N — порядок усеченной системы (12). Таким образом, определив коэффициенты B_{mn} и A_{mn}, находим акустическое поле внутри и вне сфероида.

Легко показать, что при $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi$ вращение тела не оказывает влияния на акустическое поле. Это объясняется тем, что в предложенной модели как жидкостный сфероид, так и содержащая среда полагаются идеальными.

Рассмотрим поле в дальней зоне. Используя асимптотическую формулу [3] $R_{mn}^{3}(h, \xi) \approx (-i)^{n+1} \exp(ih\xi)/h\xi$, $h\xi \to \infty$ и учитывая, что в дальней зоне $h\xi = k_2 r$ и $\eta = \cos\theta$, получаем $p_s \sim F(\theta, \varphi) \exp(ik_2 r)/k_2 r$, где

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \times (-i)^{n+1} A_{mn} S_{mn}(h, \cos\theta)\, e^{-im\varphi};$$

r, θ, φ — сферические координаты.

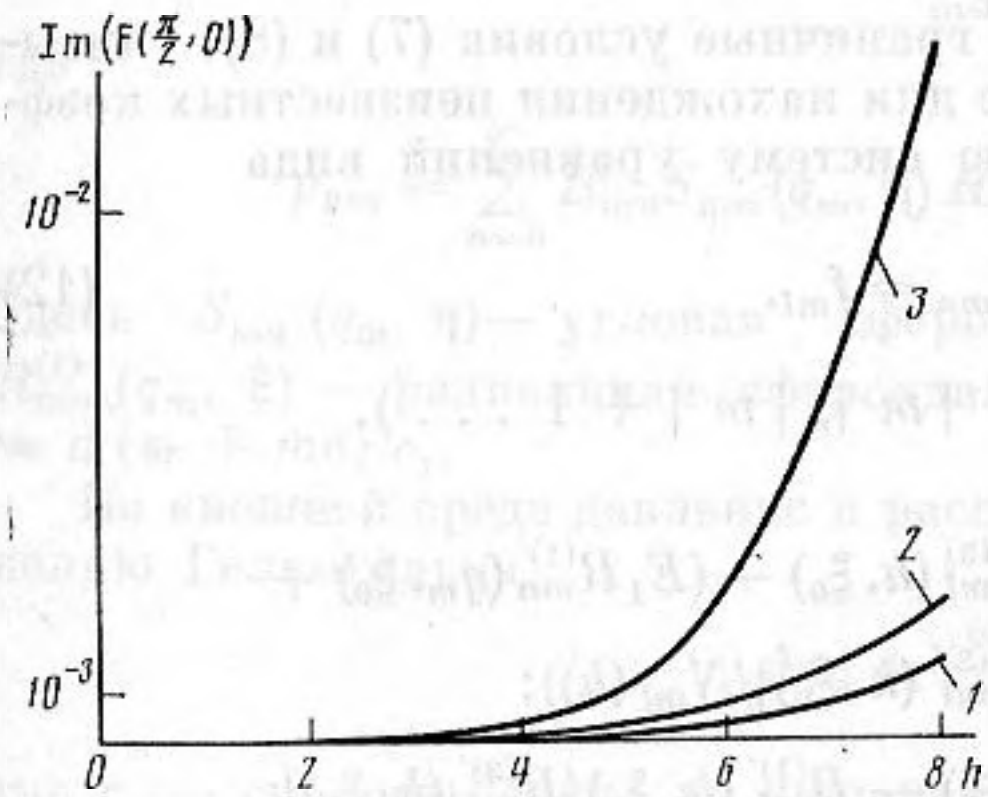

Рис. 3. Зависимость $\mathrm{Im}\,(F(\theta, \varphi))$ от волнового размера сфероида h в точке $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$: *1* — $\sigma = 3$ с$^{-1}$, *2* — $\sigma = 5$, *3* — $\sigma = 10$ с$^{-1}$

Были проведены численные расчеты характеристик рассеянного поля для случая вращения водяного сфероида ($\xi_0 = 1{,}077$) в воде ($c_1 = c_2 = 1{,}45 \cdot 10^3$ м/с, $\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м^3). На рис. 1 представлены результаты расчета $|F(\theta, \varphi)|$ в зависимости от угла θ в плоскости $\varphi = 0$; π. Диаграммы направленности рассеянного акустического поля в дальней зоне рассчитывались для $h = 3$, $\omega = 300$ с$^{-1}$, $\theta_0 = \pi/2$ и при значениях σ/ω, равных 0,03 и 0,05. Из графиков видно, что с увеличением скорости вращения сфероида эффект вращения на диаграмме направленности проявляется более сильно. На рис. 2 показано, как изменяются диаграммы направленности при различных значениях полярного угла θ_0, когда $h = 3$, $\omega = 300$ с$^{-1}$, $\sigma/\omega = 0{,}05$. На рис. 3 представлена зависимость $\mathrm{Im}\,(F(\theta, \varphi))$ от волнового размера h при $\theta_0 = \pi/2$, когда $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$. Заметим, что мнимая часть амплитуды рассеяния в направлении вперед пропорциональна полному

сечению рассеяния [6]. Как видно из графиков, с увеличением h влияние скорости вращения на полное сечение рассеяния усиливается. Отметим, что при проведении расчетов для вычисления волновых сфероидальных функций использовались стандартные программы [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Censor D., Aboudi J.* Scattering of sound waves by rotating cylinders and spheres // J. Sound and Vibr. 1971. V. 19. № 4. P. 437—444.
2. *Pekeris C. L.* Studies in reverberation. II. Scattering of sound by a cylindrical vortex embedded in a fluid at rest. // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 71. № 5. P. 1106—1108.
3. *Фламмер К.* Таблицы сфероидальных волновых функций. М.: ВЦ АН СССР, 1962. 258 с.
4. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Наука, 1962. 708 с.
6. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 427 с.
7. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Минск: Ин-т математики АН БССР. 1972. Вып. 12. С. 90—114.

Тульский политехнический институт

Поступила в редакцию 1.III.1988