УДК 534.23

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ

Хейфиц А. И.

Выведены явные представления для корней дисперсионного уравнения в рассматриваемой модели, а также уточнена локализация корней. Полученные формулы применяются для численных расчетов и асимптотического исследования корней.

Рассмотрим точечный акустический источник, находящийся в однородном жидком слое на однородном жидком полупространстве. Эта модель несмотря на свою простоту в некоторых случаях (например, мелкого моря) оказывается весьма полезной и явилась объектом многих исследований (см., например, [1], § 37 или [2], и указанную там литературу). Вычисление собственных чисел соответствующей краевой задачи сводится к решению трансцендентного уравнения [1]

$$mz\,\mathrm{ctg}\,z=\sqrt{a^2-z^2}, \tag{1}$$

где $m=\rho_1/\rho$, ρ и ρ_1 – плотности соответственно жидкого слоя и нижнего полупространства, $a=kh\nu$, h – толщина слоя, $k=\omega/c$ – волновое число слоя, ω – круговая частота источника, c – скорость звука в слое, c_1 – скорость звука в дне, $\nu^2=1-c^2/c_1^2$. Всюду считаем $\rho<\rho_1$, $c<c_1$, а волновое число для дна $k_1=\omega/c_1$ вещественным.

Сходные уравнения возникают и в других задачах (например, [3]).

В зависимости от способа вычисления интеграла, представляющего поле звукового давления, необходимо учитывать или только вещественные корни (1), лежащие на так называемом физическом листе римановой поверхности радикала – они порождают нормальные, или распространяющиеся моды, и именно этим корням соответствуют собственные числа задачи, или же и комплексные корни, лежащие на нефизическом листе римановой поверхности – виртуальные моды, или резонансы [2].

Корни уравнения (1) исследовались асимптотическими и численными методами [4–6], известно его параметрическое решение [7]. Однако разработка алгоритмов для численного решения этого уравнения, в частности для вычисления комплексных корней, продолжает привлекать внимание исследователей [8]. Настоящая заметка посвящена уточнению расположения корней уравнения (1), (см. [5, 6]), выводу явных формул для всех корней (1) и их исследованию.

Рассмотрим случай $a>0$ и $m>1$. Случай $0<m<1$ может быть изучен аналогично, а при $m=1$ получаем уравнение $\alpha\sin z=z$, явные формулы для корней которого выведены в [9].

Перейдем к описанию расположения корней уравнения (1). Очевидно, что на лучах $x=\mathrm{Re}\,z>a$ и $x<-a$ корней нет, поэтому для выделения однозначных ветвей радикала разрезы удобно провести по этим лучам. Разрезанную таким образом комплексную плоскость обозначим D_0. Через $(\sqrt{a^2-z^2})_\pm$ обозначим однозначные и непрерывные в D_0 ветви радикала, выделенные условиями $(\sqrt{a^2-z^2})_\pm|_{z=0}=\pm a$, и рассмотрим в D_0 две голоморфные функции $f_\pm(z)=(\sqrt{a^2-z^2})_\pm\sin z-mz\cos z$. Корни $f_-(z)$ лежат на физическом, а $f_+(z)$ – на нефизическом листах римановой поверхности.

Чтобы решить в D_0 два уравнения $f_\pm(z)=0$, преобразуем (1) к виду

$$z=\frac{1}{2i}\ln\frac{\sqrt{a^2-z^2}+imz}{\sqrt{a^2-z^2}-imz}+\pi j,\quad j=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

Тем самым заменили (1) счетным множеством уравнений

$$l_j^\pm(z)=0,\quad j=0,\pm1,\dots, \tag{2}$$

где

$$l_j^\pm(z)=z+\frac{i}{2}\ln\frac{(\sqrt{a^2-z^2})_\pm+imz}{(\sqrt{a^2-z^2})_\pm-imz}-\pi j.$$

Легко видеть, что на лучах $z=iy$, $|y|\geqslant\dfrac{a}{\sqrt{m^2-1}}$ уравнение (1) также корней не имеет. Область D_0, разрезанную по этим лучам, обозначим D, и выделим в D ветвь логарифма условием $\ln 1=0$ (выбор любой иной ветви логарифма приводит лишь к перенумерации корней).

В односвязной области D $l_j^\pm(z)$ являются однозначными аналитическими функциями, число корней которых можно найти по принципу аргумента. Получаем, что на физическом листе функции $l_j^-(z)$ при $0\leqslant|j|\leqslant\dfrac{a}{\pi}+\dfrac{1}{2}$ имеют по одному вещественному корню x_j^-, причем $x_0^-=0$ и $x_{-j}^-=-x_j^-$, $j>0$, а при $|j|>\dfrac{a}{\pi}+\dfrac{1}{2}$ $l_j^-(z)$ корней не имеют. Другими словами, в исходной физической задаче имеются $[a/\pi+{}^1/_2]$ распространяющихся мод. (Здесь $[x]$ означает целую часть числа x.)

На нефизическом листе функции $l_j^+(z)$ при $1 \leqslant |j| \leqslant \frac{a}{\pi} - \frac{1}{2}$ имеют по одному вещественному корню x_j^+, причем $x_{-j}^+ = -x_j^+$, $j>0$, а при $|j| \geqslant \frac{a}{\pi} + \frac{3}{2}$ $l_j^+(z)$ имеют по два комплексно-сопряженных корня z_j, $\bar{z}_j$, причем $\operatorname{Im} z_j > 0$, $z_{-j} = -z_j$, $j>0$. Функция $l_0^+(z)$ имеет при $a \geqslant \pi/2$ три корня: $z_0=0$ и симметричные чисто мнимые корни $\pm i y_0$, $y_0>0$, а при $0<a<\pi/2$ – пять корней: $z_0=0$ и $\pm z'$, $\pm \bar{z}'$.

Наконец, функция $l_{j_a}^+(z)$, где $j_a = [a/\pi + {}^1/_2]$ (в случае $l_{-j_a}^+(z)$ все аналогично), также имеет два корня, которые при $a > a_j = \pi(j - {}^1/_2)$, но близких к a_j, являются комплексно-сопряженными, с ростом a приближаются к вещественной оси и при некотором значении параметра $a = a_{\text{кр}}$ сливаются и образуют двукратный «нефизический» вещественный корень[1] $x_{\text{кр}}$, $x_{\text{кр}} < a$. При дальнейшем увеличении a он распадается на два простых вещественных корня, бóльший из которых движется к краю разреза – точке $x=a$, при $a = \pi(j + {}^1/_2)$ достигает края и далее переходит на физический лист – так рождается новая распространяющаяся мода. Для значений $a_{\text{кр}}$ и $x_{\text{кр}}$ можно выписать трансцендентные уравнения, на которых здесь не останавливаемся.

Чтобы получить явные формулы для корней, воспользуемся методом работы [10]. Здесь рассмотрим лишь корни z_j функций $l_j^+(z)$, $|j| \geqslant a/\pi + {}^1/_2$; формулы для всех остальных корней выводятся аналогично. Независимо от того, является ли z_j комплексным или вещественным (при $j = [a/\pi + {}^1/_2]$ и $a \geqslant a_{\text{кр}}$ – см. выше), он является корнем квадратного трехчлена $z^2 + p_j z + q_j$ с вещественными коэффициентами. Рассмотрим интегралы

$$I_k = \oint_\gamma \frac{z^2 + p_j z + q_j}{z^k l_j^+(z)}\, dz, \quad k = 3, 4,$$

где γ – замкнутый контур в D, содержащий внутри себя точку $z=0$. Вычисляя эти интегралы, во-первых, по теореме о вычетах и, во-вторых, деформируя контур γ так, чтобы он совпал с границей области D, получаем систему двух линейных уравнений относительно p_j и q_j, откуда $z_j = {}^1/_2(-p_j + \sqrt{p_j^2 - 4q_j})$, где

$$p_j = \frac{\delta_1\delta_2 - \delta_0\delta_3}{\delta_1\delta_3 - \delta_2^2}, \quad q_j = \frac{\delta_0\delta_2 - \delta_1^2}{\delta_1\delta_3 - \delta_2^2},$$

$$\delta_0 = d_0 + \pi j B_j - j A_j, \quad \delta_1 = d_1 - \frac{1}{\pi} C_j + D_j,$$

$$\delta_2 = d_2 - j E_j - \pi j F_j, \quad \delta_3 = d_3 - \frac{1}{\pi} G_j - H_j,$$

$$d_0 = -\frac{1}{\pi j}, \quad d_1 = \frac{m - a}{a\pi^2 j^2}, \quad d_2 = -\frac{(a-m)^2}{a^2\pi^3 j^3},$$

$$d_3 = \frac{m(3 - 2m^2)}{6a^3\pi^2 j^2} - \frac{(a-m)^3}{a^3\pi^4 j^4},$$

$$A_j = \int_a^\infty \frac{(2\varkappa - \pi) f(x)\, dx}{x g(x)}, \quad C_j = \int_a^\infty \frac{f(x) h(x)\, dx}{x^2 g(x)},$$

$$E_j = \int_a^\infty \frac{(2x - \pi) f(x)\, dx}{x^3 g(x)}, \quad G_j = \int_a^\infty \frac{f(x) h(x)\, dx}{x^4 g(x)},$$

$$f(x) = \ln\frac{mx + \sqrt{x^2 - a^2}}{mx - \sqrt{x^2 - a^2}}, \quad h(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi^2 j^2 + \frac{1}{4} f^2(x),$$

$$g(x) = h^2(x) - 4\pi^2 j^2 (x - \pi/2)^2;$$

---

[1] Эти факты уже отмечались ранее в [5].

$$B_j = 2 \int\limits_{a/\sqrt{m^2-1}}^{\infty} \frac{b(y)\,dy}{y\,d(y)}, \quad D_j = \int\limits_{a/\sqrt{m^2-1}}^{\infty} \frac{c(y)\,dy}{y^2 d(y)},$$

$$F_j = 2 \int\limits_{a/\sqrt{m^2-1}}^{\infty} \frac{b(y)\,dy}{y^3 d(y)}, \quad H_j = \int\limits_{a/\sqrt{m^2-1}}^{\infty} \frac{c(y)\,dy}{y^4 d(y)},$$

$$b(y) = y - \frac{1}{2} \ln \frac{my + \sqrt{a^2+y^2}}{my - \sqrt{a^2+y^2}},$$

$$c(y) = b^2(y) - \pi^2 (j^2 - {}^1/_4), \qquad d(y) = c^2(y) + 4\pi^2 j^2 b^2(y).$$

Эти интегралы сходятся медленно, однако замены переменных $t={}^1/_2 f(x)$ или $t = \frac{1}{2} \ln \frac{my + \sqrt{a^2+y^2}}{my - \sqrt{a^2+y^2}}$ (см. [11]) преобразуют их в интегралы с экспоненциально убывающим подынтегральным выражением, вычисление которых на ЭВМ трудностей не составляет. Заметим, что данный метод не требует выбора начального приближения и дает одинаковую точность для корней с любыми номерами.

j	ξ_j	$\tilde{\xi}_j$	β_j	$\tilde{\beta}_j$	$\tilde{\beta}_{jT}$
6	$0{,}365801+0{,}730159\cdot 10^{-3}i$	$0{,}3659+0{,}68\cdot 10^{-3}i$	6,342	5,90	6,40
7	$0{,}346401+1{,}911244\cdot 10^{-3}i$	$0{,}3464+1{,}92\cdot 10^{-3}i$	16,6009	16,7	16,8
8	$0{,}322795+2{,}903837\cdot 10^{-3}i$	$0{,}3228+2{,}90\cdot 10^{-3}i$	25,2224	25,2	25,7

В таблице приведены вычисленные по приведенным выше формулам и округленные до 10^{-6} значения первых трех резонансов $\xi_j = \frac{1}{h}\sqrt{(kh)^2 - z_j^2}$ рассматриваемой модели при значениях параметров $h=100$ м, $m=2$, $c=1500$ м/с, $c_1=1700$ м/с, $\omega=2\pi f$, $f=100$ Гц. Они соответствуют комплексным корням z_j уравнения (1) с номерами $j=6$, 7, 8. Через $\beta_j=(20\lg e)\operatorname{Im}\xi_j$ обозначен коэффициент поглощения j-й моды. Для сравнения в таблице приведены $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\beta}_j$ – соответствующие значения тех же величин, вычисленные другим способом в работе [8], а также β_{jT} – значения коэффициента поглощения, вычисленные в [8] по формулам работы [12].

Кроме численных расчетов, полученные формулы позволяют изучать асимптотическое поведение корней. Наряду с известной асимптотикой больших по модулю комплексных корней (1) $z_j = \pi j + \pi/2 + (i/2) \ln \frac{m+1}{m-1} + o(1)$, $j \to \pm\infty$, получаем, например, для корней, соответствующих распространяющимся модам, соотношение $x_j^- = \pi j + (m/a)\pi j + O(a^{-2})$ при $a \to +\infty$ и фиксированном j, $1 \leqslant j \leqslant a/\pi + {}^1/_2$, а также полезную в случае мелкого моря, когда нормальных мод нет, асимптотику комплексных корней при $a \to 0$ и фиксированном j: $z_j = \pi j + \pi/2 + (i/2) \ln \frac{m+1}{m-1} + O(a)$, причем оценка $O(a)$ является равномерной по $j=1, 2, \ldots$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. С. 343.
2. Акустика океана/Под ред. Де Санто Дж. М.: Мир, 1982. С. 320.
3. *Макаров Г. И., Новиков В. В.* О собственных значениях нормальных волн в плоском волноводном канале // Проблемы дифракции и распространения волн. Вып. II. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. С. 3–32.
4. *Pekeris C. L.* Theory of Propagation of Explosive Sound in Shallow Water // Geol. Soc. Amer. Mem. 1948. V. 27. P. 1–117/Пер. с англ. яз. в сб. Распространение звука в океане. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
5. *Газарян Ю. Л.* О поле точечного излучателя в слое, лежащем на полупространстве // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 3. С. 233–238.
6. *Rosenbaum J. H.* The Long-Time Responce of a Layered Elastic Medium to Explosive Sound // J. Geophys. Res. 1960. V. 65. № 5. P. 1577–1613.
7. *Pierce A. D.* Parametric Solution of the dispersion relation for Guided Sound Propagation in Shallow Water // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. V. 39. № 6. P. 1139–1141.
8. *Куяма Т., Кикучи Т.* Вычисление комплексных волновых чисел виртуальных мод в модели Пекериса // Подводная акустика и обработка сигналов. М.: Мир, 1985. С. 155–160.

9. *Burniston E. E., Sievert C. E.* Exact analytical solution of the transcendental equation $\alpha \sin \xi = \xi$ // SIAM J. Appl. Math. 1973. V. 24. № 4. P. 460–466.
10. *Anastasselou E. G., Ioakimidis N. I.* Application of the Cauchy theorem to the location of zeros of sectionally analytic functions // Z. Angew. Math. Phys. 1984. B. 35. № 5. S. 705–711.
11. *Henrici P.* Remark on numerical integration // Z. Angew. Math. Phys. 1984. B. 35. № 5. S. 712–714.
12. *Tindle C. T., Stamp A. P., Guthrie K. M.* Virtual modes and the surface boundary condition in underwater acoustics // J. Sound and Vib. 1976. V. 49. № 2. P. 231–240.

Ростовский государственный
университет

Поступило в редакцию
7.IV.1988