АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 1

УДК 534.23:519.6

О РЕШЕНИИ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ЯВНЫМ РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Гладкий А. В.

Проведено исследование явных разностных схем для решения параболических и эллиптических волновых уравнений в неоднородных областях. Получены условия устойчивости этих схем. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие эффективность разностных задач.

В настоящее время уделяется большое внимание разработке эффективных приближенных методов расчета акустических полей, описываемых эллиптическими или параболическими уравнениями [1—5]. При исследовании полей на больших расстояниях от источника широкое распространение получили различные модификации метода параболического уравнения с использованием, как правило, неявных разностных схем, для реализации которых требуются эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами.

В данной работе проведено исследование явных трехслойных разностных схем решения краевых задач для эллиптических и параболических волновых уравнений в неоднородных областях. Получены условия, при которых имеет место устойчивость этих схем. Приведены результаты численных экспериментов и дана сравнительная характеристика рассматриваемых разностных задач.

Акустическое давление, создаваемое точечным гармоническим источником с цилиндрическими координатами $(r, z)=(0, z_s)$ на больших расстояниях от источника, можно представить, следуя [1], в виде $p(r, z)=H_0^{(1)}(k_0 r)u(r, z)$, где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля нулевого порядка первого рода, а $u(r, z)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$L_1 u=2ik_0\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1)u=0. \qquad (1)$$

Здесь i — мнимая единица, $k_0=2\pi f/c_0$ — характерное волновое число, f — частота, c_0 — характерная скорость звука, $n(r, z)$ — непрерывный коэффициент преломления.

Наряду с (1) будем рассматривать параболические аппроксимации, которые получаются в результате приближенного представления оператора

$$\sqrt{1+L}=1+L/2-L^2/8+O(L^3)$$

в псевдодифференциальном уравнении [5]:

$$u_r+ik_0(1-\sqrt{1+L})u=0, \qquad L=(n^2(r,z)-1)+\frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ограничиваясь двумя или тремя членами ряда. Соответствующие параболические уравнения имеют вид

$$L_2 u=2ik_0\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1)u=0, \qquad (2)$$

$$L_3 u=2ik_0\frac{\partial u}{\partial r}+a(r,z)u+b(r,z)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{4k_0^2}\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}, \qquad (3)$$

где коэффициенты определяются следующим образом:

$$a(r,z)=2k_0^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)-\frac{1}{8k_0^2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}\right),$$

$$b(r,z)=1-\frac{\varepsilon}{2},\qquad \varepsilon=n^2(r,z)-1.$$

В области $G=\{r>r_0,\ 0<z<l\}$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}L_\alpha u=0,\ \alpha=1,2,3,\ (r,z)\in G,\\ u(r_0,z)=u_0(z),\ u(r,0)=u(r,l)=0,\end{gathered}\tag{4}$$

где $u_0(z)$ — заданная функция, а оператор L_α определяется одним из соотношений (1)—(3) соответственно.

Для численного решения задачи (4) введем в G сетку $\Omega=\Omega_\tau\times\Omega_h$, $\Omega_\tau=\{r=r_n=r_0+n\tau,\ n=1,2,\ldots,\}$, $\Omega_h=\{z=z_k=kh,\ k=\overline{1,N-1},\ h=l/N\}$. На сетке Ω задаче (4) поставим в соответствие трехслойную разностную схему второго порядка аппроксимации

$$\begin{gathered}A_\alpha v=0,\ \alpha=1,2,3,\ (r,z)\in\Omega,\\ v^0=u_0(z),\ v^1=g(z),\end{gathered}\tag{5}$$

где операторы определяются равенствами

$$A_1v=2ik_0v_{\overset{\circ}{r}}+v_{\bar z z}+v_{\bar r r}+k_0^2\varepsilon(r,z)v=0,$$

$$A_2v=2ik_0v_{\overset{\circ}{r}}+v_{\bar z z}+k_0^2\varepsilon(r,z)v=0,$$

$$A_3v=2ik_0v_{\overset{\circ}{r}}+a(r,z)v+b(r,z)v_{\bar z z}-\frac{1}{4k_0^2}v_{\bar z z\bar z z}$$

и введены обозначения согласно [6]

$$v=v_k^n=v(r_n,z_k),\quad v_{\overset{\circ}{r}}=(v_k^{n+1}-v_k^{n-1})/(2\tau),$$

$$v_{\bar z z}=(v_{k+1}^n-2v_k^n+v_{k-1}^n)/h^2,$$

$$v_{\bar r r}=(v_k^{n+1}-2v_k^n+v_k^{n-1})/\tau^2.$$

Отметим, что оператор $v_{\bar z z}$ определяется на множестве функций, заданных на Ω_h и равных нулю при $z=0$, $z=l$. Поэтому при вычислении оператора $v_{\bar z z\bar z z}$ необходимо учитывать дополнительные условия $v_{-1}^n=-v_1^n$, $v_{N+1}^n=-v_{N-1}^n$. Схема (5) является явной, так как решение на $(n+1)$ слое определяется через решение на двух предыдущих слоях.

Исследуем устойчивость разностных задач по начальным данным. Пусть H — гильбертово пространство комплексных сеточных функций, заданных на Ω_h и равных нулю при $z=0$, $z=l$. Скалярное произведение и норму в H определим формулами

$$(v,y)=\sum_{z\in\Omega_h}v\bar y h,\qquad \|v\|=\sqrt{(v,v)}.$$

Теорема 1. Разностная схема (5) при $\alpha=1$ устойчива по начальным данным, если выполнены условия

$$\tau\leqslant\frac{2h}{4+\varepsilon_0k_0^2h^2}\sqrt{k_0^2h^2(1-\varepsilon_0)-4},\qquad k_0h\sqrt{1-\varepsilon_0}>2,\tag{6}$$

где $-\varepsilon_0\leqslant\varepsilon(r,z)\leqslant\varepsilon_1$, $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1\geqslant0$.

Для доказательства запишем (5) в канонической форме

$$v_{\overset{\circ}{r}}+\tau^2 R v_{\bar{r}r}+Av=0 \tag{7}$$

с операторами

$$R=-i\gamma E, \quad Av=\frac{i}{2k_0}(-v_{\bar{z}z}-\varepsilon k_0^2 v), \quad \gamma=1/(2k_0\tau^2),$$

E — единичный оператор. На основании второй разностной формулы Грина [6] оператор A — кососимметричен. Также кососимметричен оператор R, а A и R — перестановочны, т. е. $A^*=-A$, $R^*=-R$, $AR=RA$. Поэтому согласно [6] схема (7) устойчива, если при всех $v\in H$ выполнено неравенство

$$\|v\|^2+4\tau^2\|Rv\|^2\geqslant\tau^2\|(A-2R)v\|^2. \tag{8}$$

В нашем случае это условие принимает вид

$$\|v\|^2\geqslant\tau^2\left(\|Av\|^2-\frac{4\gamma}{2k_0}(v_{\bar{z}z}+\varepsilon k_0^2 v, v)\right).$$

Рассмотрим самосопряженный оператор

$$Cv=\frac{1}{2k_0}(-v_{\bar{z}z}-\varepsilon k_0^2 v), \quad (Cv, y)=(v, Cy).$$

Тогда $\|Av\|^2=(Cv, Cv)$ и

$$\|v\|^2\geqslant\tau^2(\|Cv+2\gamma v\|^2-4\gamma^2\|v\|^2),$$

откуда следует неравенство

$$\tau\|C+2\gamma E\|\leqslant\sqrt{1+4\gamma^2\tau^2}.$$

В силу самосопряженности C это неравенство эквивалентно

$$\tau|(Cv, v)+2\gamma\|v\|^2|\leqslant\sqrt{1+4\gamma^2\tau^2}\|v\|^2, \ v\in H.$$

Поэтому схема (5) с $\alpha=1$ устойчива при выполнении условий

$$-(\sqrt{1+4\gamma^2\tau^2}+2\tau\gamma)\|v\|^2\leqslant\tau(Cv, v), \tag{9}$$

$$\tau(Cv, v)\leqslant(\sqrt{1+4\tau^2\gamma^2}-2\tau\gamma)\|v\|^2. \tag{10}$$

Подставляя в (9) оценку снизу

$$(Cv, v)\geqslant\frac{1}{2k_0}(\lambda_1-\varepsilon_1 k_0^2)\|v\|^2,$$

где λ_1 — наименьшее собственное значение оператора $-v_{\bar{z}z}$, получим

$$1+\sqrt{1+k_0^2\tau^2}\geqslant\frac{\tau^2}{2}(k_0^2\varepsilon_1-\lambda_1), \quad \lambda_1=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2l}\approx 0.$$

Отсюда следует оценка

$$\tau\leqslant\frac{2}{(k_0^2\varepsilon_1-\lambda_1)}\sqrt{k_0^2(1+\varepsilon_1)-\lambda_1}. \tag{11}$$

Учитывая, что

$$(Cv, v)\leqslant\frac{1}{2k_0}(\lambda_{N-1}+\varepsilon_0 k_0^2)\|v\|^2,$$

где $\lambda_{N-1}\leqslant 4/h^2$ — наибольшее собственное значение оператора $-v_{\bar{z}z}$, из (10) приходим к неравенству

$$\lambda_{N-1}+\varepsilon_0 k_0^2\leqslant\frac{2}{\tau^2}(\sqrt{1+k_0^2\tau^2}-1),$$

которое выполняется, если

$$\tau \leqslant \frac{2h}{4+\varepsilon_0 k_0^2 h^2} \sqrt{k_0^2 h^2 (1-\varepsilon_0) - 4}. \tag{12}$$

Сравнение (11) и (12) показывает справедливость условий устойчивости (6).

Легко видеть, что второе условие (6) накладывает ограничение на количество узлов сетки по глубине волновода. Действительно, это условие, которое можно переписать в виде $\pi/(\lambda/h) > 1$, означает, что количество узлов на длину волны не должно превышать трех.

Исследуем устойчивость разностной схемы (5) при $\alpha=2$. Эта схема является частным случаем (7), если в ней положить $R=0$.

Теорема 2. Для устойчивости разностной схемы (5) при $\alpha=2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\tau \leqslant \frac{2k_0 h^2}{4+\varepsilon_2 k_0^2 h^2}, \qquad |\varepsilon(r, z)| \leqslant \varepsilon_2. \tag{13}$$

Справедливость этого условия следует из (8) с учетом оценки

$$\|Av\|^2 \leqslant \frac{1}{4k_0^2}\left(\frac{4}{h^2} + \varepsilon_2 k_0^2\right)^2 \|v\|^2.$$

Наконец, для разностной задачи (5) при $\alpha=3$ справедлива

Теорема 3. Пусть выполнено неравенство

$$\tau \leqslant \frac{2k_0^3 h^4}{4+4k_0^2 h^2 b_1 + k_0^2 a_1 h^4}, \tag{14}$$

где $|a(r, z)| \leqslant a_1$, $|b(r, z)| \leqslant b_1$. Тогда разностная схема (5) при $\alpha=3$ устойчива.

Действительно, рассматриваемая задача может быть записана в виде (7), если принять $R=0$,

$$Av = \frac{i}{2k_0}\left(-av - bv_{\bar{z}z} + \frac{1}{4k_0^2} v_{\bar{z}z\bar{z}z}\right).$$

Оценивая $\|Av\|^2$, получим

$$\|Av\|^2 \leqslant \frac{1}{4k_0^2}\left(a_1 + b_1\lambda_{N-1} + \frac{1}{4k_0^2}\lambda_{N-1}^2\right)^2 \|v\|^2.$$

Из этой оценки и из (8) следует (14).

Расчет поля по схеме (5) предполагает вычисление в каждом узле сетки мнимой и действительной частей. Количество арифметических операций можно уменьшить в 2 раза, если воспользоваться следующим подходом, который изложим на примере задачи (5) при $\alpha=2$. Пусть $X(r, z)$, $Y(r, z)$ — сеточные аппроксимации действительной и мнимой частей искомого решения. На первом этапе определяется комплексное решение v^1. Затем последовательно для узлов $(r, z)=(r_n, z)$, $z \in \Omega_h$, $n=1, 2, \ldots$, вычисляется $X(r, z)$ из уравнения

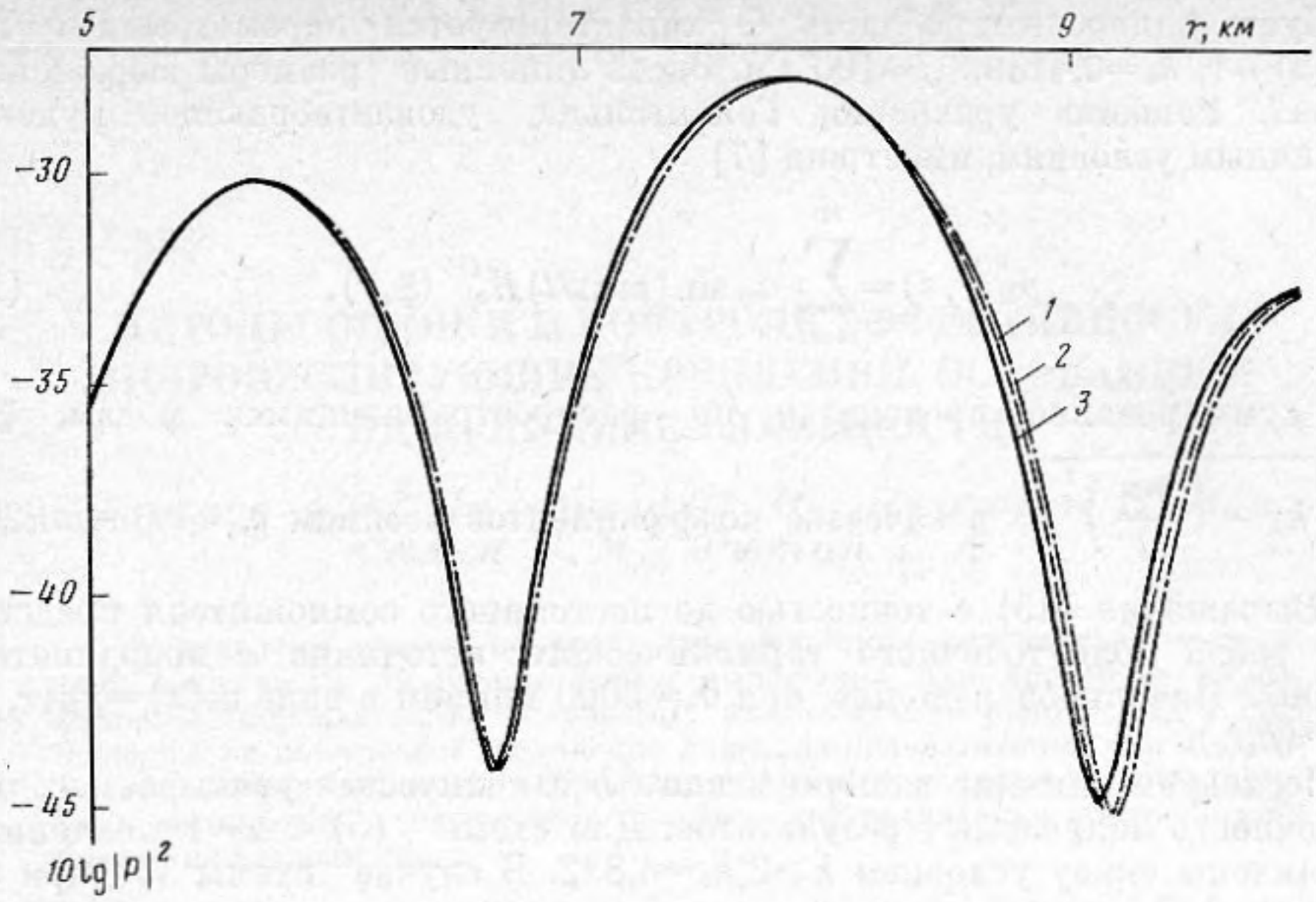
$$X_{\overset{\circ}{r}} = -\frac{1}{2k_0}(Y_{\bar{z}z} + \varepsilon k_0^2 Y)$$

при n — нечетном и $Y(r, z)$ из уравнения

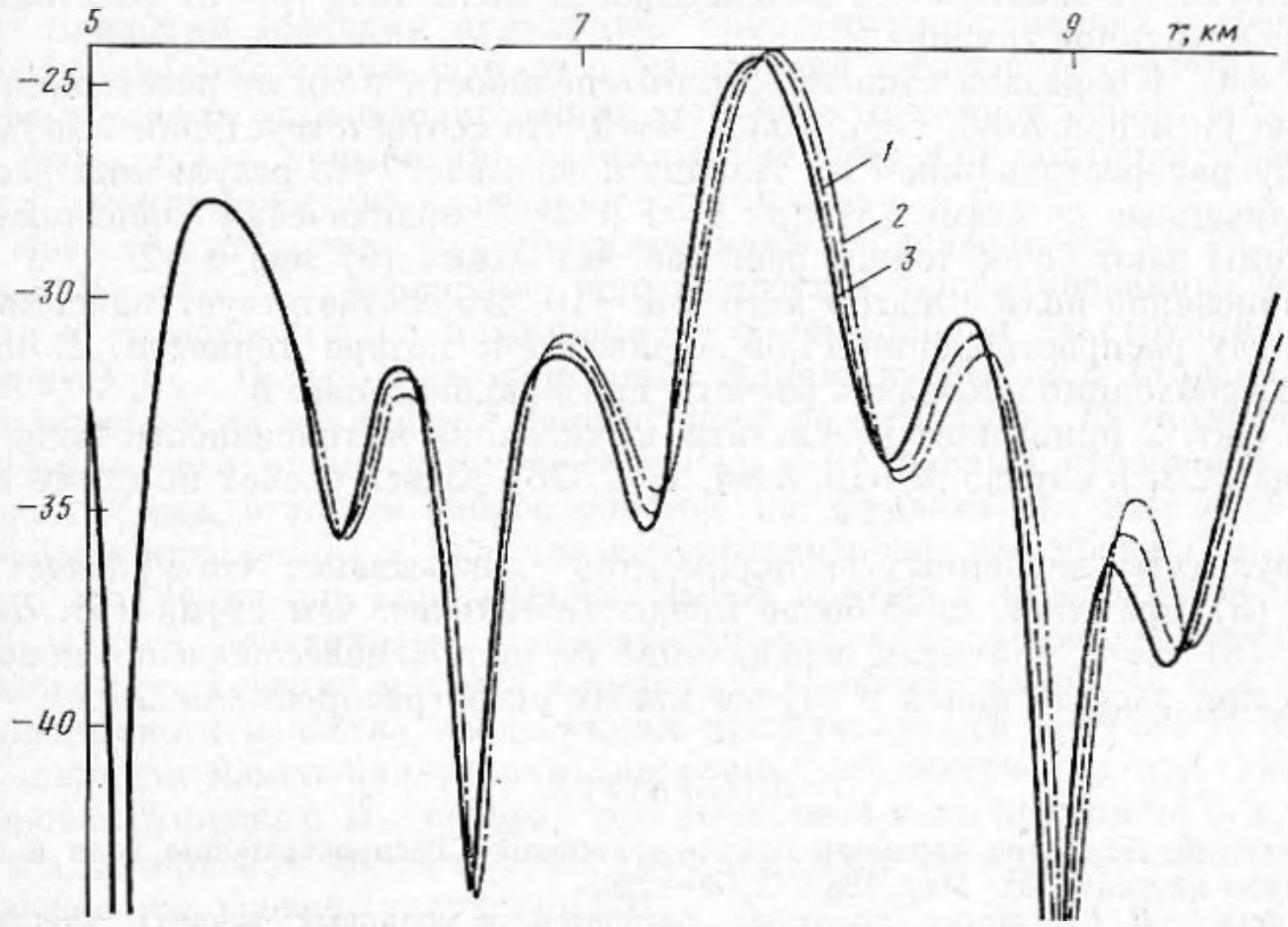
$$Y_{\overset{\circ}{r}} = \frac{1}{2k_0}(X_{\bar{z}z} + \varepsilon k_0^2 X),$$

если n — четное.

Решение на первом шаге v^1 можно получить разными способами, на-



Фиг. 1. Зависимость интенсивности поля от расстояния, вычисленная по схеме (5), $\alpha=1$ или $\alpha=3$ (*1*); по схеме (5), $\alpha=2$ (*2*); точное решение (*3*)



Фиг. 2. Зависимость интенсивности поля от расстояния, вычисленная для 10 мод по схеме (5), $\alpha=3$ (*1*); по схеме (5), $\alpha=2$ (*2*); точное решение (*3*)

пример в виде суммы нормальных мод, с помощью неявной схемы вида

$$\frac{v^1-v^0}{\tau}=\frac{1}{2}A(v^0+v^1), \qquad Av=\frac{i}{2k_0}(v_{\bar{z}z}+\varepsilon k_0^2 v)$$

и др.

Разностные схемы (5) аппроксимируют решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Для сравнения и иллюстрации их эффективности рассмотрим численный пример. В качестве тестовой модели рассмотрим краевую задачу для уравнения Гельмгольца, решение которой представимо в виде суммы нормальных мод. Так как с каждой модой можно связать угол распространения, то представляет интерес сравнить разностные схемы в зависимости от количества учитываемых мод, т. е. от величины максимального угла распространения.

Пусть однородная область G характеризуется параметрами $l=300$, $n(r, z)=1$, $k_0=0{,}4139$, $f=100$ Гц. Здесь линейные размеры выражены в метрах. Решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее нулевым граничным условиям, имеет вид [7]

$$p_M(r, z)=\sum_{m=1}^{M} a_m \sin(m\pi z/l) H_0^{(1)}(\xi_m r), \tag{15}$$

где суммирование проводится по распространяющимся модам, $\xi_m=\sqrt{k_0^2-\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}$, а в качестве коэффициентов возьмем $a_m=i\sin(m\pi 200/l)$. Выражение (15) с точностью до постоянного сомножителя представляет собой поле точечного гармонического источника с координатами (0,200). Начальное решение при $r_0=5000$ примем в виде $u_0(z)=p_M(r, z)/H_0^{(1)}(k_0 r_0)$.

Исследуем влияние величины шага h и количества учитываемых мод на точность получаемых результатов. Для схемы (5) с $\alpha=1$ значения h ограничены снизу условием $h>2/k_0=4{,}832$. В случае схемы (5) при $h=6\alpha=1, 2, 3$ из условий устойчивости соответственно имеем $\tau\leqslant 4{,}41$; $\tau\leqslant 7{,}45$; $\tau\leqslant 6{,}41$.

Результаты численных экспериментов приведены в виде графиков, иллюстрирующих зависимость интенсивности поля $10\lg|p|^2$ от расстояния на фиксированной глубине.

На фиг. 1 показана зависимость интенсивности поля от расстояния на глубине 90 м при $h=6$, $\tau=4{,}3403$ и $M=5$, что соответствует максимальному углу распространения 7,3°. Анализ показывает, что результаты расчета, полученные по схеме (5) при $\alpha=1$ и $\alpha=3$, практически совпадают и эти схемы дают более точное решение, чем схема (5) при $\alpha=2$.

Вычисление поля с шагом $h=6$ и $M=10$, что соответствует максимальному углу распространения 14,65°, приводит к потере точности. В этом случае необходимо проводить расчеты при меньшем шаге h.

На фиг. 2 приведены результаты вычисления интенсивности поля на глубине 92 м в случае $M=10$, $h=4$, $\tau=2{,}3787$. Здесь расчет по схеме (5), $\alpha=3$.

Результаты численных экспериментов показывают, что разностная схема (5) при $\alpha=1$, $\alpha=3$ более предпочтительнее, чем схема (5), $\alpha=2$. Схему (5), $\alpha=1$, учитывая ограничение на шаг h, целесообразно использовать при расчете полей в случае малых углов распространения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тапперт Ф. Д.* Метод параболического уравнения // Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980. С. 180–226.
2. *Завадский В. Ю.* Метод конечных разностей в волновых задачах акустики. М.: Наука, 1982. 272 с.
3. *Гладкий А. В.* Решение волновых уравнений в неоднородных областях // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 1. С. 18–21.
4. *Lee D., Botseas G., Papadakis J. S.* Finite-difference solution to the parabolic wave equation // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. № 3. P. 795–800.
5. *Mary D. F. St., Lee D., Botseas G.* A modified wide angle parabolic wave equation // J. Comput. Phys. 1987. V. 71. P. 304–315.
6. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.
7. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.

Институт кибернетики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
15.III.1988