АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 6

УДК 534.26

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОГО СЛОЯ И УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Аленицын А. Г., Соколов А. А.

Рассматривается задача о гармонических звуковых колебаниях в слое жидкости постоянной толщины, лежащем на упругом полупространстве.

В теории дифракции представляет интерес задача о распространении звука в жидкости, лежащей на упругом неоднородном полупространстве. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с осью z, перпендикулярной границе полупространства, причем плоскость $z=0$ соответствует поверхности жидкости, а $z=H$ — границе жидкость — полупространство. Предполагается, что свойства обеих сред зависят от одной координаты z.

Уравнение гармонических колебаний упругой среды с частотой ω имеет вид [1]

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla, \mathbf{u})+\mu\Delta\mathbf{u}+(\nabla, \mathbf{u})\nabla\lambda+2(\nabla\mu, \nabla)\mathbf{u}+[\nabla\mu, [\nabla, \mathbf{u}]]+\rho\omega^2\mathbf{u}=0, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(r, \varphi, z)$ — вектор смещений, ρ — плотность, λ и μ — коэффициенты Ламе (для жидкости $\mu\equiv0$). В случае осевой симметрии $\mathbf{u}=(u_r, 0, u_z)$, при этом допускается разделение переменных

$$u_r=Z_1(z, k)H_1^{(1)}(kr), \quad u_z=Z_2(z, k)H_0^{(1)}(kr).$$

Для четырехкомпонентного вектора $\mathbf{Z}=(Z_1, Z_2, k^{-1}Z_1', k^{-1}Z_2')$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений [2]

$$\mathbf{Z}'=(kA+B)\mathbf{Z}, \quad (2)$$

где k — параметр разделения (волновое число), A и B — матрицы 4×4, зависящие от z.

Если в жидкости пренебречь градиентом плотности, то система (2) сводится к одному уравнению для Z_1 (при $0\leqslant z\leqslant H$):

$$Z_1''+(\omega^2/c^2(z)-k^2)Z_1=0, \quad c^2(z)=\lambda/\rho. \quad (3)$$

Остальные компоненты $\mathbf{Z}$ и звуковое давление выражаются через Z_1.

Системы (2), (3) дополняются граничными условиями на поверхности жидкости $Z_1(0)=0$, условиями убывания или излучения при $z\to\infty$ и условиями непрерывности нормальных смещений и тензора упругих напряжений при $z=H$ (которые для $\mathbf{Z}$ означают непрерывность Z_2 и λZ_1+ $+(\lambda+2\mu)Z_4$). Краевая задача состоит в отыскании собственных значений, т. е. значений параметра k, при которых существуют нетривиальные решения уравнений (2), (3).

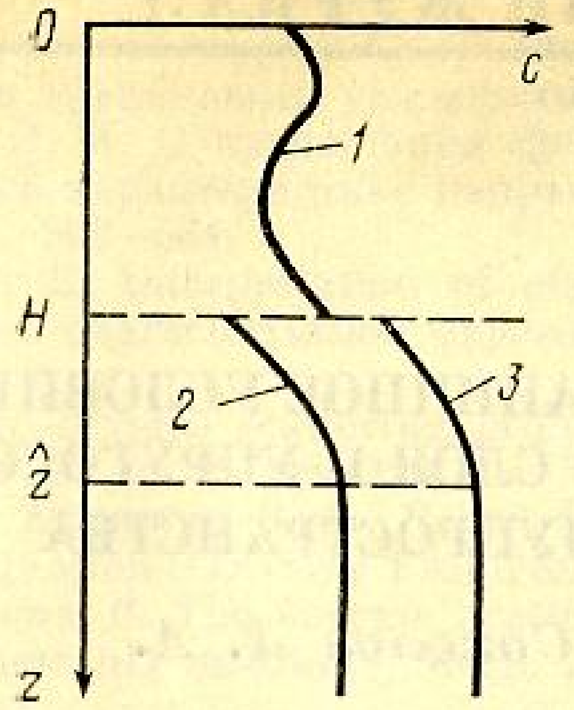
Условие при $z=H$ можно записать в виде

$$Z_1/Z_1'|_{z=H-0}=G(k), \quad (4)$$

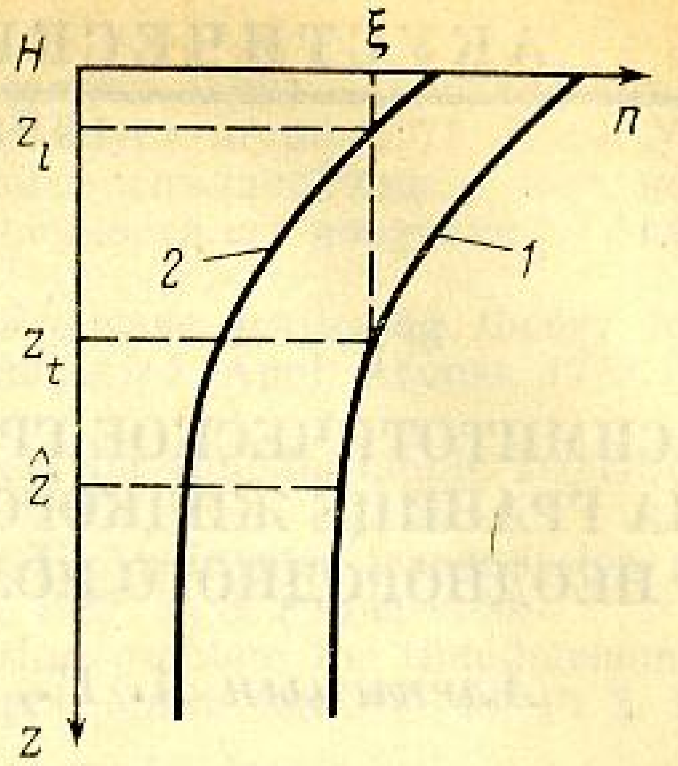
где $G(k)=-k(\lambda Z_1+(\lambda+2\mu)Z_4)/(\omega^2\rho_1Z_2)|_{z=H+0}$; $\rho_1=\rho(H-0)$.

Таким образом, если найти (точно или приближенно) вектор $\mathbf{Z}$ в упругом полупространстве, можно определить функцию $G(k)$.

Предположим, что величины ρ, λ, μ слабо зависят от z, и будем искать решение $\mathbf{Z}$ асимптотически при $k\to\infty$. На скорости поперечных и продольных волн $c_t=\sqrt{\mu/\rho}$ и $c_l=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ наложим условия (фиг. 1): а) начиная с некоторой глубины $\hat{z}$ скорости постоянны; б) при $z<\hat{z}$ скорости монотонно растут: $c_t'>0$, $c_l'>0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимость скоростей от глубины z: *1* — скорость в жидкости $c(z)$, *2* — поперечная скорость $c_t(z)$, *3* — продольная скорость $c_l(z)$

Фиг. 2. Точки поворота z_t и z_l поперечных и продольных волн; *1* — $n_l(z)$, *2* — $n_t(z)$

Перейдем от спектрального параметра k к безразмерному спектральному параметру $\xi=kc_*/\omega$ и постоянному большому параметру $k=\omega/c_*$, где c_* — некоторая характерная скорость, например $c_*=c(0)$. Вид асимптотики $\mathbf{Z}$ зависит от наличия или отсутствия точек поворота продольных и поперечных волн, т. е. значений z_l и z_t переменной z, удовлетворяющих уравнениям $\xi=n_l(z_l)$ и $\xi=n_t(z_t)$, где $n_l=c_*/c_l$, $n_t=c_*/c_t$.

Наиболее простой вид имеет асимптотика $\mathbf{Z}$ и $G(\xi)$ при отсутствии точек поворота. В этом случае система (2) приводится к диагональной [3], и для $G(\xi)$ получаем

$$G(\xi)\sim\frac{\rho_0}{\rho_1 k(n_t^0)^4}\{4\xi^2 m_t^0-(2\xi^2-(n_t^0)^2)^2/m_l^0\},\tag{5}$$

где $m_i=m_i(\xi,\ z)=(\xi^2-n_i^2(z))^{1/2}$, $i=l,\ t$; $\rho_1=\rho(H-0)$. Величины, относящиеся к $z=H+0$, помечены здесь нулем. Радикал в m_i положителен при $\xi>n_i$, разрезы на плоскости ξ проведены из точек $\pm n_i$ на ∞ соответственно в I и IV четвертях.

Для однородного полупространства равенство (5) выполняется точно. Формула (5) приведена в [4].

Если система (2) имеет точку поворота, например z_l, то, как и в [5], для нахождения асимптотики решения системы воспользуемся методом расщепления. Для $G(\xi)$ получается представление

$$G(\xi)\sim\frac{\rho_0}{\rho_1 k(n_t^0)^4}\left\{4\xi^2 m_t^0-\frac{(2\xi^2-(n_t^0)^2)^2}{|m_l^0|}D_l(\xi)\right\},\tag{6}$$

где $D_l(\xi)=-k^{1/3}|\varphi_l(H)|^{1/2}v(k^{2/3}\varphi_l(H))/v'(k^{2/3}\varphi_l(H))$, $v(t)$ — функция Эйри,

$$\varphi_l(z)=\left|\frac{3}{2}\int\limits_{z_l}^{z}m_l(t)\,dt\right|^{2/3}\operatorname{sign}(z-z_l).$$

Если $k^{2/3}|\varphi_l(H)|\gg1$ (точка поворота z_l далека от дна), то можно воспользоваться асимптотикой функции Эйри, тогда

$$D_l(\xi)\sim\operatorname{tg}(k\Phi_l(\xi)+\pi/4),\qquad \Phi_l(\xi)=\int\limits_{H}^{z_l}|m_l(t)|\,dt.\tag{7}$$

Этот частный случай равномерной формулы (6) приведен в [4].

Если же $k^{2/3}|\varphi_l(H)|=O(1)$ (точка поворота z_l близка к H), то функцию $n_l^2(z)$ можно приближенно заменить линейной, оставив два первых члена ряда Тейлора. В этом случае $D_l(\xi)$ имеет порядок $k^{1/3}$ и первым слагаемым в (6) можно пренебречь. В итоге для $G(\xi)$ получаем выражение

$$G(\xi)\sim\frac{\rho_0}{\rho_1(n_l^0)^4k^{2/3}}\frac{(2\xi^2-(n_l^0)^2)^2v(Q_l)}{\zeta_l^{1/3}v'(Q_l)},\qquad(8)$$

где $Q_l=k^{2/3}(\xi^2-(n_l^0)^2)/\zeta_l^{2/3}$, $\zeta_l=|(n_l^2(z))'|_{z=H+0}$. Подчеркнем, что в области применимости (8), т. е. при $Q_l\sim1$, формула (7) несправедлива.

Действуя аналогично, можно получить выражения для $G(\xi)$ в случае точки поворота z_l, при этом формула, аналогичная (6), примет вид

$$G(\xi)\sim\frac{\rho_0}{\rho_1k(n_l^0)^4}\left\{4\xi^2|m_l^0|D_l(\xi)-\frac{(2\xi^2-(n_l^0)^2)^2}{m_l^0}\right\},\qquad(9)$$

где $D_l(\xi)=-v'(k^{2/3}\varphi_l(H))/[k^{1/3}|\varphi_l(H)|^{1/2}v(k^{2/3}\varphi_l(H))]$.
Если z_l далека от дна, получаем аналог (7):

$$D_l(\xi)\sim\mathrm{ctg}(k\Phi_l(\xi)+\pi/4),\qquad \Phi_l(\xi)=\int\limits_H^{z_l}|m_l(t)|\,dt.\qquad(10)$$

Если же z_l близка к H, линеаризуем $n_l^2(z)$, после этого

$$D_l(\xi)\sim-v'(Q_l)/(|Q_l|^{1/2}v(Q_l)),\ Q_l=(k/\zeta_l)^{2/3}(\xi^2-(n_l^0)^2).\qquad(11)$$

Если система (2) имеет две точки поворота (фиг. 2), то ее решение находится сшиванием решений, полученных для каждой точки поворота в отдельности. В этом случае при z_l, близких к H, остается справедливой формула (8). Если же $k^{2/3}|\varphi_l(H)|\gg1$, то получаем

$$G(\xi)\sim\frac{\rho_0}{\rho_1k(n_l^0)^4}\left\{4\xi^2|m_l^0|\,\mathrm{ctg}(k\Phi_l(\xi)+\pi/4)-\right.$$
$$\left.-\frac{(2\xi^2-(n_l^0)^2)^2}{|m_l^0|}\mathrm{tg}(k\Phi_l(\xi)+\pi/4)\right\}.\qquad(12)$$

Формула (12), справедливая, когда z_l и z_t далеки от H, приведена в [4].

Формулы (5)–(12) асимптотически описывают все виды граничного условия на границе жидкость – упругое полупространство.

В дальнейшем предполагается дать подробный теоретический и численный анализ спектра краевой задачи, в частности анализ поверхностных волн на границе жидкость – упругое дно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Аленицын А. Г.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 547–550.
3. *Аленицын А. Г.* Волны Рэлея в неоднородном упругом слое // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 880–888.
4. *Мальцев Н. Е.* Асимптотика граничных условий на слоистом упругом дне слоистого океана // Математические методы прикладной акустики. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1986. С. 90–97.
5. *Аленицын А. Г.* Волны Рэлея в неоднородном полупространстве волноводного типа // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 222–229.

Ленинградский государственный
университет
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
1.VIII.1985
после исправления
20.I.1988