АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 6

УДК 534.23:534.13

МАТРИЦА ГРИНА ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОДЕРЖАЩЕЙ СЖИМАЕМУЮ СРЕДУ, ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Георгиевский В. П., Малютин И. С., Тарасова А. Г.

Рассмотрена задача вынужденных гармонических колебаний цилиндрической оболочки, содержащей акустическую среду. Построение матрицы Грина для рассматриваемой задачи основано на применении к разрешающим уравнениям поставленной задачи конечных интегральных преобразований Фурье и представлении их с помощью общего решения уравнений для амплитудных функций перемещений в форме, где в качестве произвольных постоянных выступают некоторые граничные параметры.

В работе [1] рассматривалась задача об определении матрицы Грина колебаний цилиндрической оболочки в идеальной жидкости. Края оболочки предполагались шарнирно опертыми. Задача при этом сводилась к двум интегральным уравнениям, связывающим прогиб оболочки и давление со стороны жидкости.

Ниже предлагается получение матрицы Грина для цилиндрической оболочки, содержащей акустическую среду и совершающей вынужденные гармонические колебания, при произвольных граничных условиях на краях оболочки и наличии жестких днищ у акустической полости, которое требует лишь определения постоянных величин из граничных условий. Оно основано на применении к разрешающим уравнениям поставленной задачи конечных интегральных преобразований Фурье и представлении с их помощью общего решения уравнений для амплитудных функций перемещений цилиндрической оболочки в форме, где в качестве произвольных постоянных выступают некоторые граничные параметры [2]. Такое представление позволяет в ряде случаев существенно сократить количество неизвестных, определяемых из граничных условий, и получить решение в явном виде.

Определение матрицы Грина в рассматриваемом случае сводится к решению уравнений движения цилиндрической оболочки под действием гармонической сосредоточенной силы:

$$L_{11}u+L_{12}v+L_{13}w=B\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{B}{R^2}P_1\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)\sin\omega t,$$

$$L_{21}u+L_{22}v+L_{23}w=B\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{B}{R^2}P_2\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)\sin\omega t,$$

$$L_{31}u+L_{32}v+L_{33}w=-B\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{B}{R^2}P_3\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)\sin\omega t-$$

$$-B\rho_0\frac{\partial\varphi(R,x,y,t)}{\partial t}$$

и уравнения для потенциала скорости акустической среды

$$a^2\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

при соответствующих граничных условиях и условии

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial \varphi(R,x,y,t)}{\partial r}.$$

Здесь u, v, w — компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки, L_{ij} — известные дифференциальные операторы в частных производных, в общем случае содержащие и параметрические члены с начальными усилиями, Rx, Ry — координаты соответственно в осевом и окружном направлениях, t — время, r — радиальная координата в цилиндрической системе, R — радиус оболочки, h — толщина, ρ — плотность, (ξ, η) — точка приложения сосредоточенной силы с компонентами P_1, P_2, P_3; ω — частота, $\delta(\ldots)$ — дельта-функция, ρ_0 — плотность акустической среды, a — скорость звука в ней, $B=(1-\nu^2)R^2/Eh$; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

В случае применения технической теории оболочек операторы L_{ij} имеют вид

$$L_{11}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\qquad L_{12}=L_{21}=\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial y^2},$$

$$L_{13}=L_{31}=\nu\frac{\partial}{\partial x},\qquad L_{22}=\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{23}=L_{32}=\frac{\partial}{\partial y},\qquad L_{33}=c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2+1+\frac{p(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{q(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где p, q — соответственно начальные сжимающие кольцевые и осевые напряжения, $c^2=h^2/12R^2$.

Разыскивая решение в виде

$$\{u,v,w\}=\sin\omega t\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x), f_3^{(n)}(x)\}e^{in(y-\eta)},$$

$$\varphi=\cos\omega t\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi_n(x,r)e^{in(y-\eta)},$$

для амплитудных функций получаем уравнения (индекс n опущен)

$$\sum_{j=1}^{3}l_{ij}f_j=-\frac{B}{R^2}(1-2\delta_{3i})P_i\delta(x-\xi)+\delta_{i3}B\rho_0\omega\Phi(x,R),\ \ (i=1,2,3), \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}+\frac{\omega^2}{a^2}\right)\Phi=0; \qquad (2)$$

при этом

$$\omega f_3=\frac{\partial\Phi(R,x)}{\partial r}. \qquad (3)$$

Здесь l_{ij} — обыкновенные дифференциальные операторы, δ_{ij} — символ Кронекера.

Применим к (2) и (3) конечное косинус-преобразование Фурье [3]:

$$f^c(k)=\int_0^l f(x)\cos\gamma_k x\,dx \qquad (\gamma_k=k\pi/l),$$

$$f(x)=\frac{1}{l}f^c(0)+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}f^c(k)\cos\gamma_k x.$$

Используя граничные условия (Rl — длина оболочки) $\partial\Phi/\partial x=0$, $(x=0, l)$, получаем

$$\frac{d^2\Phi^c}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Phi^c}{dr}+\left(\frac{\omega^2}{a^2}-\frac{\gamma_k^2}{R^2}-\frac{n^2}{r^2}\right)\Phi^c=0, \qquad \omega f_3^c=\left.\frac{d\Phi^c}{dr}\right|_{r=R}.$$

Отсюда находим

$$\Phi^c=\frac{\omega}{\mu_k}\frac{I_n(\mu_k r)}{I_n'(\mu_k R)}f_3^c, \quad \left(\mu_k^2=\frac{\omega^2}{a^2}-\gamma_k^2\right). \tag{4}$$

Применяя далее к первому уравнению (1) конечное синус-преобразование Фурье, а ко второму и третьему – косинус-преобразование, учитывая при этом (4), получаем три алгебраических уравнения относительно трансформант амплитудных функций перемещений.

Решая их и возвращаясь к оригиналам, находим

$$f_r=f_{10}F_{1r}(x)+S_0F_{2r}(x)+f_{30}'F_{3r}(x)+Q_0F_{4r}(x)+f_{1l}\Phi_{1r}(x)+S_l\Phi_{2r}(x)+$$
$$+f_{3l}'\Phi_{3r}(x)+Q_l\Phi_{4r}(x)+\frac{B}{2\pi R^2}\sum_{t=1}^{3}(2\delta_{t3}-1)P_tK_{tr}(x,\xi), \qquad r=1,2,3. \tag{5}$$

Здесь (применительно к технической теории оболочек)

$$F_{1r}=\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{in\nu d_{2r}(\gamma_k)+\gamma_k d_{1r}(\gamma_k)+\nu d_{3r}(\nu_k)}{d(\gamma_k)}\psi_{rk}(x),$$

$$F_{2r}=\frac{2B}{Rl}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{2r}(\gamma_k)}{d(\gamma_k)}\psi_{rk}(x),$$

$$F_{3r}=-\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{3r}(\gamma_k)}{d(\gamma_k)}\left[c^2(\gamma_k^2+\nu n^2)-\frac{q_2(1-\nu^2)}{E}\right]\psi_{rk}(x),$$

$$F_{4r}=\frac{2}{l}\frac{c^2R^3}{D}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{3r}(\gamma_k)}{d(\gamma_k)}, \qquad \Phi_{tr}(x)=(2\delta_{r1}-1)F_{tr}(l-x),$$

$$\psi_{rk}(x)=\left(1-\frac{\delta_{k0}}{2}\right)(1-\delta_{r1})\cos\gamma_k x-\delta_{r1}\sin\gamma_k x,$$

$$K_{tr}(x,\xi)=\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{tr}(\gamma_k)}{d(\gamma_k)}\psi_{kr}(x)\psi_{tk}(\xi),$$

$$d=\det\|a_{tr}\|, \qquad D=Eh^3/12(1-\nu^2),$$

$$a_{11}=-\gamma_k^2-\frac{1-\nu}{2}n^2+B\rho h\omega^2, \qquad a_{12}=-a_{21}=in\frac{1+\nu}{2}\gamma_k,$$

$$a_{13}=-a_{31}=\nu\gamma_k, \qquad a_{22}=-\frac{1-\nu}{2}\gamma_k^2-n^2+B\rho h\omega^2, \qquad a_{23}=a_{32}=in,$$

$$a_{33}=c^2(\gamma_k^2+n^2)-B\left(\frac{q_2h}{R^2}+\frac{q_1h}{R^2}\gamma_k^2+\rho h\omega^2\right)-B\rho_0\frac{\omega^2}{\mu_k}\frac{I_n(\mu_kR)}{I_n'(\mu_kR)},$$

$d_{tr}(\gamma_k)$ – алгебраическое дополнение элемента d_{tr}, q_1, q_2 – соответственно начальные осевое и кольцевое напряжения в оболочке.

Выражениями (5) представлено общее решение для амплитудных функций перемещений, в котором в качестве произвольных величин выступают значения амплитудных функций осевого перемещения (f_{10}, f_{1l}), угла поворота образующей (f_{30}', f_{3l}'), касательного $S=[(1-\nu)R/2B](inf_1+$ $+f_2')$ и перерезывающего в смысле Кирхгофа $Q=(c^2R/B)[f_3'''-n^2(2-\nu)f_3']$ усилий на краях оболочки. Функции $K_{tr}(x,\xi)$ пропорциональны компонентам матрицы Грина для оболочки с подвижно защемленными краями.

Подчиняя (5) граничным условиям, получаем уравнения для неизвестных постоянных величин, после определения которых матрицу Грина можно считать найденной. Решение в форме (5) позволяет в ряде случаев существенно сократить количество определяемых из граничных условий неизвестных и достаточно просто получить окончательный результат в явном виде.

Пусть для примера граничные условия будут (жесткая заделка относительно осевого и нормального перемещений) $f_1=S=f_3=f_3'=0$, $(x=0, l)$. Тогда решение, согласно (5), представится в виде

$$f_r=Q_0F_{4r}(x)+Q_l\Phi_{4r}(x)+\frac{B}{2\pi R^2}\sum_{t=1}^{3}(2\delta_{t3}-1)P_tK_{tr}(x,\xi).$$

Удовлетворяя оставшимся невыполненными граничным условиям $f_3=$ $=0$ при $x=0$, l, получаем два уравнения для определения Q_0 и Q_l:

$$Q_0F_{43}(0)+Q_lF_{43}(0)+\frac{B}{2\pi R^2}\sum_{t=1}^{3}(2\delta_{t3}-1)P_tK_{tr}(0,\xi)=0,$$

$$Q_0F_{43}(l)+Q_lF_{43}(l)+\frac{B}{2\pi R^2}\sum_{t=1}^{3}(2\delta_{t3}-1)P_tK_{tr}(l,\xi)=0,$$

откуда

$$Q_0=\frac{B}{2\pi R^2[F_{43}^2(0)-F_{43}^2(l)]}\sum_{t=1}^{3}(2\delta_{t3}-1)P_t[F_{43}(l)K_{tr}(l,\xi)-F_{43}(0)K_{tr}(0,\xi)],$$

$$Q_l=\frac{B}{2\pi R^2[F_{43}^2(0)-F_{43}^2(l)]}\sum_{t=1}^{3}(2\delta_{t3}-1)P_t[F_{43}(0)K_{tr}(l,\xi)-F_{43}(l)K_{tr}(0,\xi)].$$

Заметим, что равенство $F_{43}^2(0)-F_{43}^2(l)=0$ представляет собой характеристическое уравнение, определяющее собственные частоты системы (оболочка, содержащая сжимаемую среду). Аналогично могут быть рассмотрены и другие случаи граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авербух А. З., Вестуман Р. И.* Матрица Грина колебаний цилиндрической оболочки конечной длины в идеальной жидкости // VI Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. М.: Наука, 1986. С. 14 (Аннотация докладов).
2. *Малютин И. С.* О методе граничных параметров и его применении к решению задач устойчивости цилиндрических оболочек при различных граничных условиях // Прикладная механика. 1980. Т. XVI, № 10. С. 31–35.
3. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехтеориздат, 1956. С. 204.

Поступила в редакцию
19.I.1988