АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 5

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВОГО ПУЧКА НА НЕДЕФОРМИРУЕМЫХ СФЕРЕ И ЦИЛИНДРЕ

Поддубняк А. П., Пороховский В. В.

Проанализированы частотные зависимости мультипольных разложений для эффективных сечений рассеяния частично озвученных акустически жестких и мягких сфер и круговых цилиндров. Выяснена роль отраженных и дифракционных волн в формировании сечений рассеяния в прямом и обратном направлениях.

В работе [1] изучались частотные зависимости дифференциального сечения рассеяния при осесимметричном озвучивании полюсной части недеформируемой сферы звуковым пучком. Применение приближенного метода Кирхгофа не позволило, однако, отличить по этим характеристикам акустически мягкий объект от акустически жесткого и тем более описать волновое поле в области геометрической тени. Ниже на основе метода Рэлея, т. е. путем разложения рассеянного поля акустического давления в ряд по мультиполям, эффективные сечения рассеяния частично озвученных сфер исследованы в более полном объеме. Наряду со сферическим случаем рассматривается также плоская симметричная задача рассеяния ограниченного звукового пучка, набегающего на недеформируемый круговой цилиндр по части дуги окружности его поперечного сечения.

Дифференциальные сечения рассеяния в случае локализованного воздействия ограниченным пучком [2]

$$\sigma_d^{s,c}(\theta,\ k)=|f^{s,c}(\theta,\ k)|^2 \tag{1}$$

отличаются от классических (при полном освещении препятствия) тем, что в разложениях Рэлея амплитуд рассеяния f^s для сферы и f^c для цилиндра по парциальным волнам

$$f^s(\theta,k)=\frac{i}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{\Omega j_l{}^0(x)}{\Omega h_l^{(1)}(x)}P_l(\cos\theta), \tag{2}$$

$$f^c(\theta,k)=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\,i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\frac{\Omega J_m{}^0(x)}{\Omega H_m^{(1)}(x)}\cos m\theta \tag{3}$$

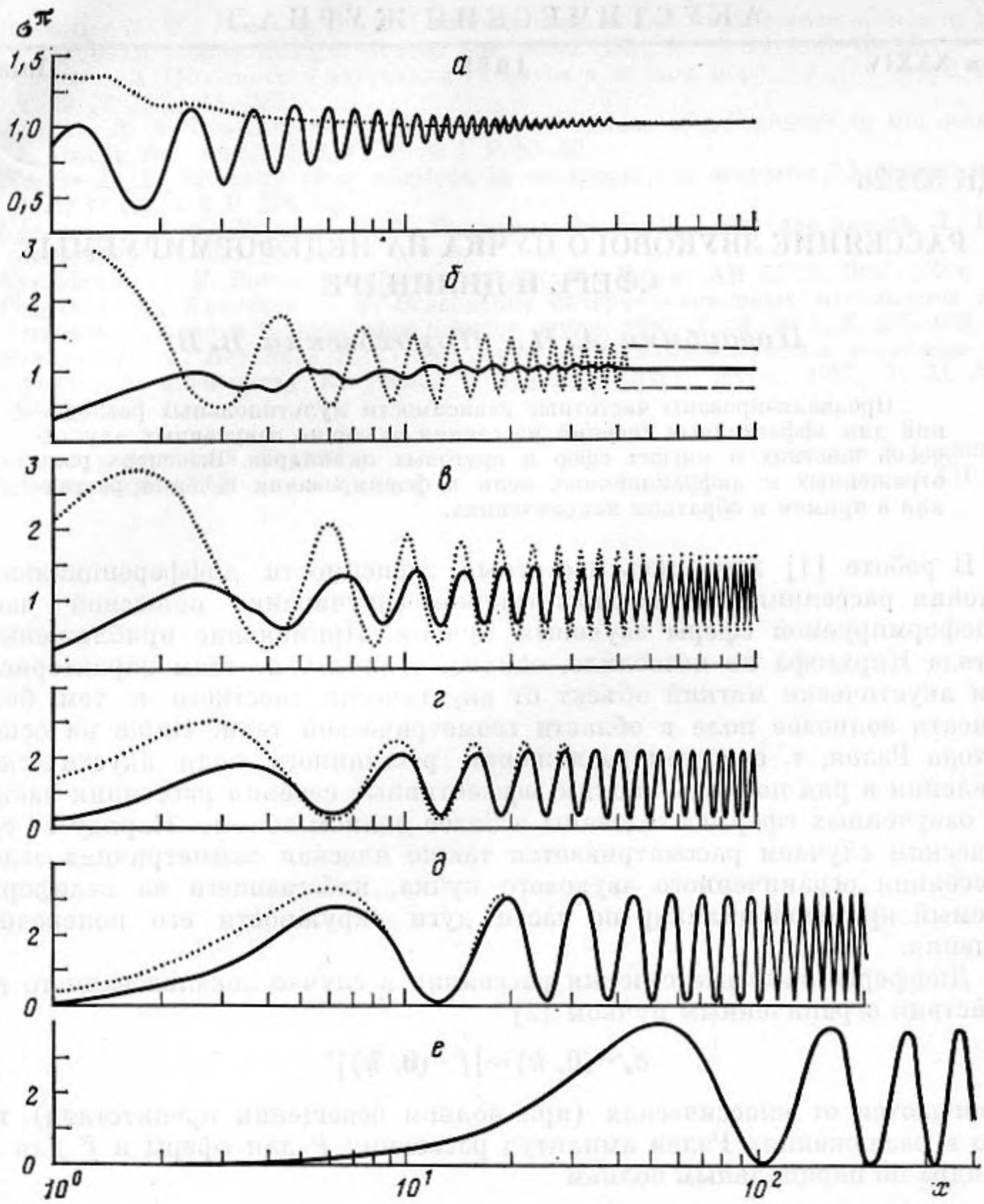
$$(\varepsilon_0=1;\ \varepsilon_m=2,\ m\geqslant 1)$$

вместо сферических и цилиндрических функций Бесселя $j_l(x)$, $J_m(x)$ $(x=ka)$ входят неполные бесселевы функции

$$j_l{}^0(x)=\frac{i^l}{2}\int_{\mu_0}^{1}e^{-ix\mu}P_l(\mu)\,d\mu,$$

$$J_m{}^0(x)=\frac{i^m}{\pi}\int_{\mu_0}^{1}e^{-ix\mu}\frac{T_m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}d\mu\quad(\mu_0=\cos\theta_0). \tag{4}$$

В соотношениях (2)–(4) $P_l(\mu)$ – полиномы Лежандра; $T_m(\mu)$ – полиномы Чебышева первого рода; $h_l{}^{(1)}(x)$ и $H_m{}^{(1)}(x)$ – сферические и ци-



Фиг. 1. Частотные зависимости локационного сечения рассеяния $\sigma^{\pi}(\theta=\pi)$ для различных значений относительной глубины d_0/a звукового пятна на поверхности акустически жесткой (сплошные кривые) или акустически мягкой (пунктирные кривые) сфер: *а* – 2; *б* – 1; *в* – 0,75; *г* – 0,5; *д* – 0,25; *е* – 0,03

линдрические функции Ханкеля первого рода; k — волновое число в жидкости; θ — полярный угол, начало отсчета которого совпадает с направлением рассеяния «вперед»; θ_0 — угловой размер звукового пятна на поверхности акустически мягкого ($\Omega=1$) или акустически жесткого неподвижного ($\Omega=d/dx$) объекта радиуса a.

На фиг. 1 изображены частотные зависимости (в логарифмической шкале волновых размеров объекта) моностатического (локационного) сечения рассеяния в безразмерной форме $\sigma^{\pi}(k)=\sigma_{bi}^{s}(\pi, k)/\pi a^2$ акустически жесткой (сплошные кривые) и мягкой (пунктирные кривые) сфер. Здесь и ниже $\sigma_{bi}^{s}(\theta, k)=4\pi\sigma_d^{s}(\theta, k)$, $\sigma_{bi}^{s}(\theta, k)=2\pi\sigma_d^{c}(\theta, k)$ — бистатические сечения рассеяния. Значения для $d_0/a=1-\mu_0$ указывают на относительные размеры звукового пятна, причем $\mu_0=-1$ отвечает случаю полностью озвученного объекта. Из этих графиков следует, что различия между локационными сечениями для мягкой и жесткой сфер теряются при очень узких пучках ($\theta_0\leqslant 30°$). Увеличение относительной глубины пятна d_0/a приводит к возрастанию роли ползущих волн Франца, которая для мягкой и жесткой сфер различна. Структуру локационных сечений рассеяния (1) можно исследовать аналитически, применив к амп-

литудам рассеяния (2), (3) преобразование Ватсона и метод перевала, предположив, что в процессе дифракции принимают участие парциальные волны с большими угловыми моментами [2]. Тогда для сферического случая имеем

$$\sigma_{bi}^{s}(\pi,\ k)=4\pi\left[|f_g|^2+2\,\mathrm{Re}\,(f_g f_{cw}^*)+|f_{cw}|^2\right], \tag{5}$$

где f_g, f_{cw} — составляющие форм-функции, соответствующие геометрическим волнам (т. е. зеркально отраженной волне и волне, излученной краевой окружностью звукового пятна на сфере), а также ползущей волне Франца. Для очень узкого пучка вклад волн Франца, особенно в случае мягкой сферы, крайне мал, поэтому в формуле (5) можно учесть только геометрический и интерференционный члены. Тогда

$$\sigma^{\pi}(k)=\sigma_g(k)+\sigma_{\mathrm{int}}(k), \tag{6}$$

где σ_g — «геометрическая часть» локационного рассеяния, которая совпадает с результатом кирхгофовского приближения [1] и не содержит отличительных признаков жесткого и мягкого отражателей:

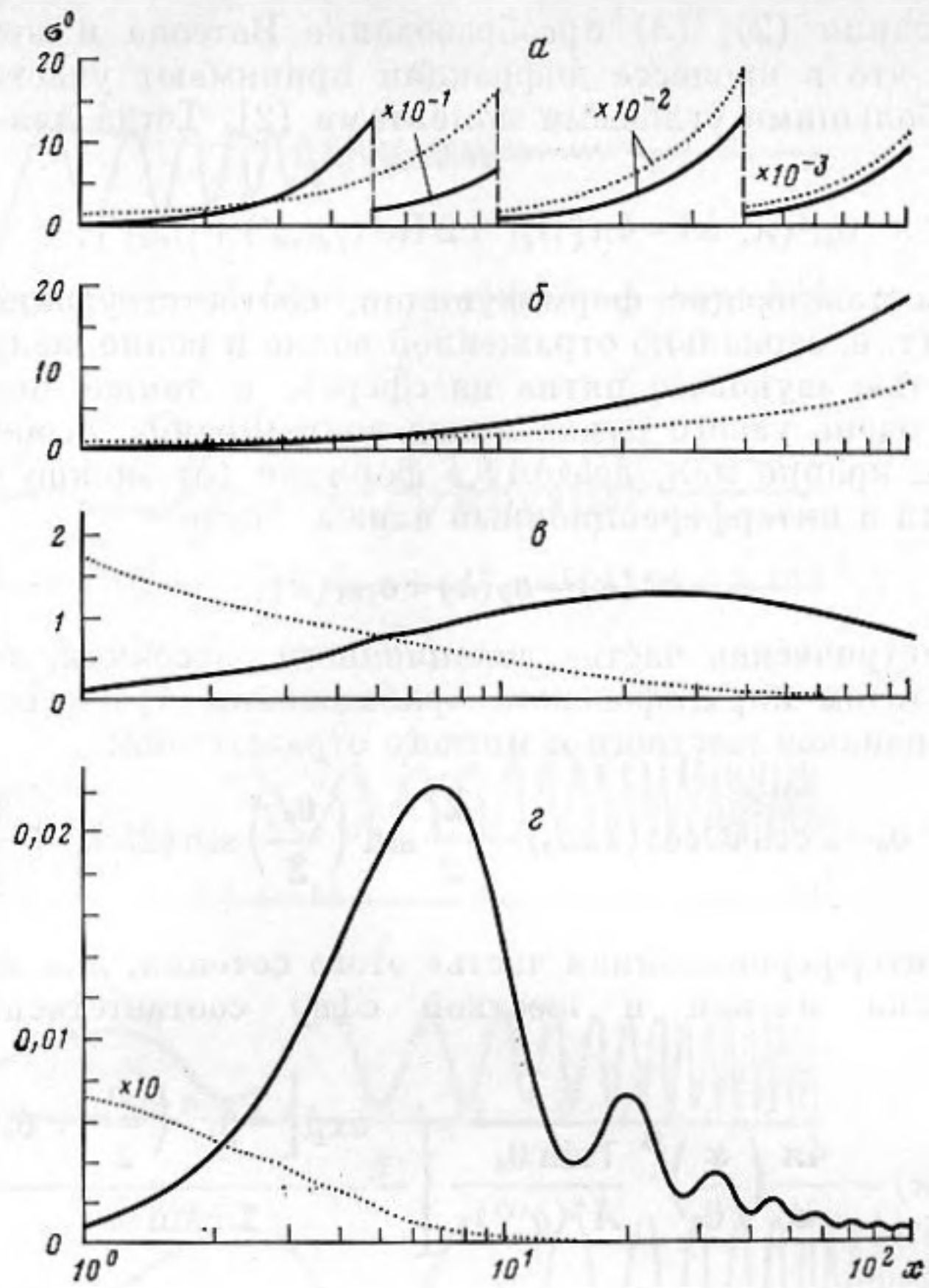
$$\sigma_g(k)=1+\cos^2\theta_0-2\cos\theta_0\cos(2kd_0)-\frac{2}{x}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin(2kd_0)+\frac{1}{x^2}\sin^2(kd_0), \tag{7}$$

а $\sigma_{\mathrm{int}}(k)$ — «интерференционная часть» этого сечения, для которой в случае акустически мягкой и жесткой сфер соответственно получаем $(0<\theta_0<\pi/2)$

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{int}}^{(s)}(k)=\frac{4\pi}{x}\left(\frac{x}{6}\right)^{2/3}\frac{\sqrt{\sin\theta_0}}{A'(q_1^{(s)})}\Bigg\{&-\frac{\exp\left[-\beta_1^{(s)}\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)\right]}{1+\sin\theta_0}\times\\ &\times\Bigg[\cos\theta_0\sin\left(\alpha_1^{(s)}\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)+x\cos\theta_0-\frac{\pi}{3}\right)-\\ &-\sin\left(\alpha_1^{(s)}\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)+x(2-\cos\theta_0)-\frac{\pi}{3}\right)\Bigg]+\frac{\exp\left[-\beta_1^{(s)}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)\right]}{1-\sin\theta_0}\times\\ &\times\Bigg[\cos\theta_0\cos\left(\alpha_1^{(s)}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)+x\sin\theta_0-\frac{\pi}{3}\right)-\\ &-\cos\left(\alpha_1^{(s)}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)+x(2-\cos\theta_0)-\frac{\pi}{3}\right)\Bigg]\Bigg\},\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{int}}^{(r)}(k)=\frac{2\pi\cos\theta_0\sqrt{\sin\theta_0}}{q_1^{(r)}A(q_1^{(r)})}\Bigg\{&\frac{\exp\left[-\beta_1^{(r)}\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)\right]}{1+\sin\theta_0}\times\\ &\times\Bigg[\cos\theta_0\cos\left(\alpha_1^{(r)}\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)+x\cos\theta_0\right)-\cos\left(\alpha_1^{(r)}\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)+\right.\\ &\left.+x(2\cos\theta_0-1)\right)\Bigg]-\frac{\exp\left[-\beta_1^{(r)}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]}{1-\sin\theta_0}\Bigg[\cos\theta_0\sin\left(\alpha_1^{(r)}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)+\right.\\ &\left.+x\cos\theta_0\right)-\sin\left(\alpha_1^{(r)}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)+x(2-\cos\theta_0)\right)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что в формулах (8), (9) учтены однократно обогнувшие сферу волны Франца, которым соответствует ближайший к действительной оси плоскости комплексного параметра удара $\rho=\nu/k$ полос Редже $\rho_1^{(r,s)}$



Фиг. 2. Те же характеристики для бистатического сечения рассеяния в дифракционном направлении $\sigma^0(\theta=0)$ при разных значениях d_0/a: *а* – 2; *б* – 1; *в* – 0,5; *г* – 0,03

($\nu=l+1/2$ – комплексная переменная преобразования Ватсона)

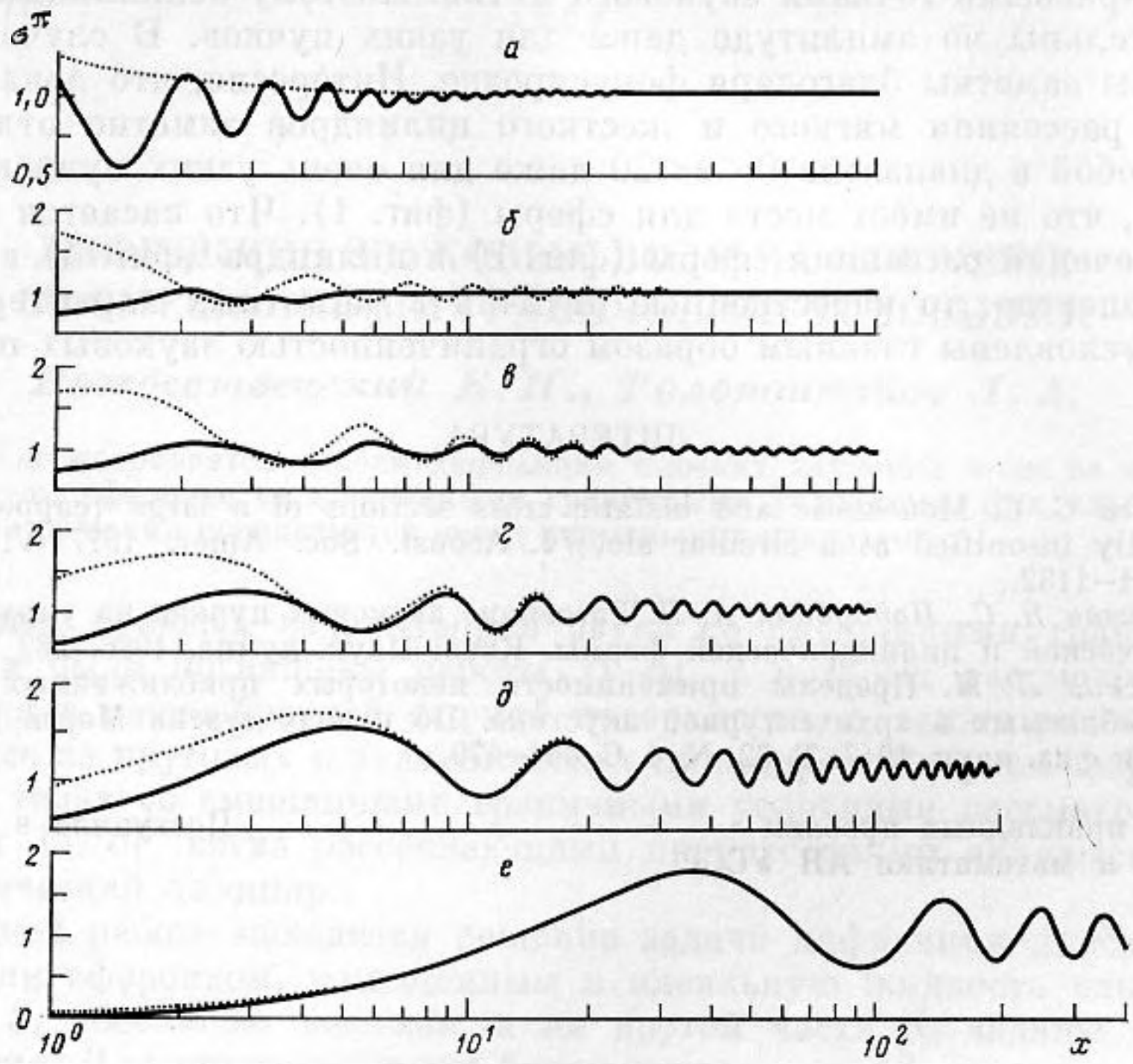
$$k\rho_j^{(r,s)}=\alpha_j^{(r,s)}+i\beta_j^{(r,s)}=x+\left(\frac{x}{6}\right)^{1/3}e^{\pi i/6}\,q_j^{(r,s)}\,/2+O(x^{-1/3})\;(j=1,2,\ldots),$$

где $q_j^{(s)}$ – нули функции Эйри $A(q)$, а $q_j^{(r)}$ – нули производной $A'(q)$ $[q_1^{(s)}=3{,}372;\ A'(q_1^{(s)})=-1{,}059;\ q_1^{(r)}=1{,}469;\ A(q_1^{(r)})=1{,}167]$.

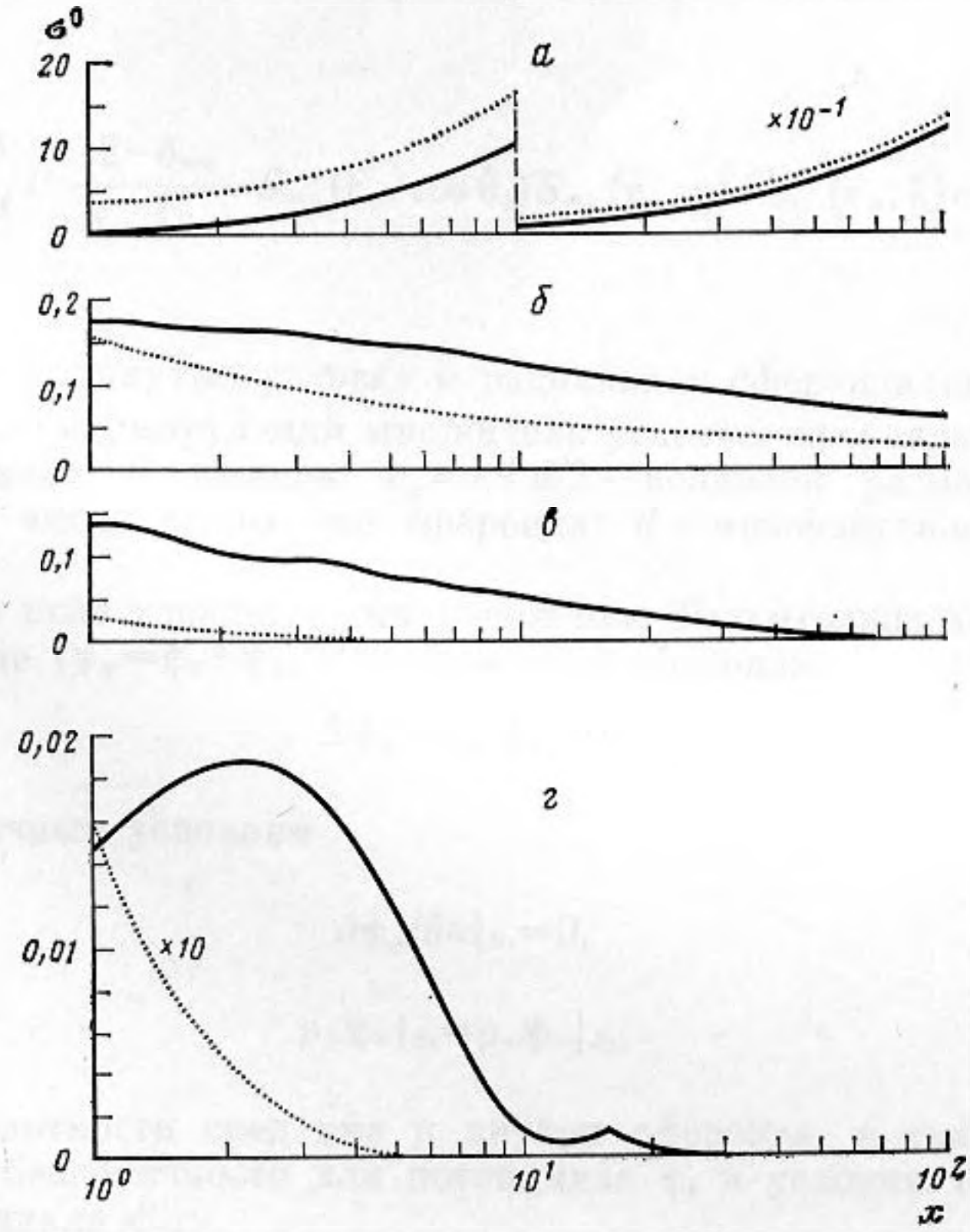
Из формулы (7) видно, что главная геометрическая часть локационного сечения рассеяния $\sigma_g(k)$ колеблется между значениями $4\cos^4(\theta_0/2)$ и $4\sin^4(\theta_0/2)$. Глубокие минимумы при этом получаются, если $d_0=n\lambda/2$ ($n=1, 2, \ldots$; λ – длина волны), что соответствует кратному числу зон Френеля, содержащихся в области звукового пятна [1, 3]. Однако имеющая место квазипериодичность под влиянием волн Франца в случае жесткой сферы значительно нарушается для достаточно широких пучков, что позволяет легко отличать характеристики рассеяния мягкой и жесткой сфер (фиг. 1).

В области тени основными являются дифракционные эффекты, степень влияния которых на сечения рассеяния для мягких и жестких сфер существенно различна. Это видно из фиг. 2, на которой приведены бистатические сечения рассеяния в направлении «вперед», вычисленные в безразмерной форме: $\sigma^0(k)=\sigma_{bi}^s(0, k)/\pi a^2$ (обозначения для кривых прежние). Видно, что с уменьшением ширины пучка амплитуды сечений резко уменьшаются, переходя от монотонных функций к квазипериодическим. При этом значения $\sigma^0(k)$ для мягкой сферы на порядок ниже, чем для жесткой.

Аналогичные вычисления локационных ($\theta=\pi$) и дифракционных ($\theta=0$) сечений рассеяния $\sigma^\pi(k)=\sigma_{bi}^c(\pi, k)/\pi a$, $\sigma^0(k)=\sigma_{bi}^c(0, k)/\pi a$ для цилиндрического объекта, озвучиваемого по участку $|\pi-\theta|\leqslant\theta_0$, проил-



Фиг. 3. Частотные зависимости локационного сечения рассеяния $\sigma^{\pi}(\theta=\pi)$ для различных значений относительной глубины d_0/a звукового пятна на поверхности акустически жесткого (сплошные кривые) или акустически мягкого (пунктирные кривые) круговых цилиндров: *а* – 2; *б* – 1; *в* – 0,75; *г* – 0,5; *д* – 0,25; *е* – 0,03



Фиг. 4. Те же характеристики для бистатического сечения рассеяния в дифракционном направлении $\sigma^0(\theta=0)$ при разных значениях d_0/a: *а* – 2; *б* – 1; *в* – 0,5; *г* – 0,03

люстрированы на фиг. 3, 4. Здесь характерно слабое влияние волн, излученных краевыми точками звукового пятна. Поэтому осцилляции кривых незначительны по амплитуде даже для узких пучков. В случае сферы эти волны заметны благодаря фокусировке. Интересно, что локационные сечения рассеяния мягкого и жесткого цилиндров заметно отличаются между собой в диапазоне $0<x<20$ даже для очень узких пучков, $\theta_0 \approx 14°$ (фиг. 3), что не имеет места для сферы (фиг. 1). Что касается бистатических сечений рассеяния сферы (фиг. 2) и цилиндра (фиг. 4) в направлении «вперед», то качественные отличия в частотных характеристиках здесь обусловлены главным образом ограниченностью звуковых пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaunaurd G. C.* Monostatic and bistatic cross sections of a large (capped) sphere partially insonified at a circular slot // J. Acoust. Soc. Amer. 1977. V. 61. № 5. P. 1121–1132.
2. *Подстригач Я. С., Поддубняк А. П.* Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. Киев: Наук. думка, 1986. 262 с.
3. *Бреховских Л. М.* Пределы применимости некоторых приближенных методов, употребляемых в архитектурной акустике. По поводу статьи Морза и Болта // Успехи физ. наук. 1947. Т. 32. № 4. С. 464–479.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию 17.I.1988