УДК 534.21

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОДЕ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ КВАДРАТОМ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Старков А. С.

В работе изучается модельная задача о распространении волн в безграничной среде с одним максимумом показателя преломления. При расчете звуковых полей в волноводе, ось которого находится на линии максимума показателя преломления, обычно используется либо лучевой метод, либо метод нормальных волн [1–3]. Поле лучей в волноводе образует сложную систему каустик, имеющих точки возврата и сгущающихся при увеличении расстояния между источником и точкой наблюдения. В окрестности каустик для применимости лучевого метода необходимы существенные усложнения (особенно при больших дальностях). Более точные результаты могут быть получены методом нормальных волн, но даже на сравнительно небольших частотах (5–10 Гц) для природных акустических волноводов число суммируемых нормальных волн составляет несколько десятков. В последнее время были предложены комбинированные методы, основанные на представлении поля в волноводе в виде суммы нормальных, геометрооптических волн и остатка [4–6], а также метод, основанный на суммировании в точке наблюдения гауссовых пучков, каждый из которых связан с лучом, проходящим в некоторой окрестности этой точки [7, 8].

Рассмотрим двумерную задачу нахождения поля точечного источника, расположенного в среде с показателем преломления

$$n^2(z)=1-z^2/L^2, \tag{1}$$

где L – ширина волновода.

Декартова система координат выбрана так, что ось $z=0$ является осью волновода. Звуковое давление $u(x, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2n^2(z))u(x, z)=-\delta(M, M_0) \tag{2}$$

и условиям предельного поглощения на бесконечности $u(x,z)\to 0$, $x^2+z^2\to\infty$, $\operatorname{Im} k>0$. Источник помещен в точку M_0 с координатами $(0, z_0)$, точка наблюдения M имеет координаты (x, z).

Решение задачи известно [1, 2]

$$u(x, z)=\frac{-1}{4\pi}\sqrt{\frac{kL}{2}}\int\limits_{\infty-}^{\infty} e^{ikxp}\frac{D_t(z_2)D_t(z_1)}{D_t(0)D_t'(0)}\,dp, \tag{3}$$

где $D_t(z)$ – функция параболического цилиндра, z_1 и z_2 – наибольшая и наименьшая из приведенных глубин – $\sqrt{2k/L}z_1$ и $\sqrt{2k/L}z_2$, индекс $t=kL(1-p^2)/2-{}^1/_2$.

С учетом равенства $D_t(0)D_t'(0)=(2\pi)^{-1/2}\Gamma(t+1)\sin\pi t$ интеграл (3) может быть вычислен по вычетам и представляется в виде суммы ряда

$$u(x, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi kL}}\frac{\exp\left[ikx\sqrt{1-\dfrac{2n+1}{kL}}\right]}{\sqrt{1-\dfrac{2n+1}{kL}}}\frac{D_n(z_1)D_n(z_2)}{n!}, \tag{4}$$

каждое слагаемое в котором является нормальной волной. При $2n+1<kL$ нормальная волна является распространяющейся, а при $2n+1>kL$ – затухающей вдоль трассы.

Для упрощения формулы (4) воспользуемся производящей функцией, а именно

$$H(\xi, \eta, y)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n(\xi)D_n(\eta)\frac{y^n}{n!}, \tag{5}$$

где $H(\xi, \eta, y)$ имеет вид

$$H(\xi, \eta, y)=\exp\left(-\frac{\xi^2+\eta^2}{4}\cdot\frac{1+y^2}{1-y^2}-\frac{\xi\eta}{1-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{6}$$

Формула (6) для произведения функций параболического цилиндра вытекает из аналогичной формулы Мелера (см. [9]) для многочленов Эрмита.

Вернемся теперь к представлению акустического поля в виде суммы нормальных волн (4). Представим экспоненциальный сомножитель в каждой нормальной волне в виде интеграла

$$\frac{\exp\left(ikx\sqrt{1-\frac{2n+1}{kL}}\right)}{\sqrt{1-\frac{2k+1}{kL}}}=\sqrt{\frac{kL}{2\pi}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty \exp i\left[\left(\frac{kL-1}{2}-n\right)p+\frac{kx^2}{2Lp}\right]\frac{dp}{\sqrt{p}}. \quad (7)$$

Подставим (7) в (4) и заметим, что возникающий ряд имеет вид (5) с $y=\exp(-ip)$, следовательно, его сумма легко может быть найдена. В результате для звукового поля получаем следующее выражение:

$$u(x, z)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2^{3/2}\pi}\int_0^\infty \exp\left\{i\left[\frac{kL-1}{2}p+\frac{kx^2}{2Lp}+\frac{z_1^2+z_2^2}{4}\operatorname{ctg} p-\frac{z_1z_2}{2\sin p}\right]\right\}\times$$

$$\times\left(1-e^{-2ip}\right)^{-1/2}\frac{dp}{\sqrt{p}}. \quad (8)$$

Можно показать, что интеграл (8) является сходящимся, и также сходящимися будут интегралы, полученные из (8) однократным дифференцированием по x или z. Для возможности двукратного дифференцирования и проверки того, что (8) есть решение уравнения (2), контур интегрирования необходимо при малых p смещать в нижнюю полуплоскость, а при больших p – в верхнюю.

Точно таким же образом может быть получена формула для поля точечного источника в пространственном волноводе, если профиль показателя преломления имеет вид (1). Отличие от вышеприведенного вывода формулы (8) для плоской задачи состоит в том, что вместо равенства (7) используется аналогичное равенство для $\exp\left(ikR\sqrt{1-\frac{2n+1}{kR}}\right)$, которое получается при дифференцировании (7) по kx; при суммировании ряда необходимо использовать интегральное представление функции Ханкеля

$$H_0^1(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \exp(iy\operatorname{ctg} q)\,dq.$$

Возникающий после суммирования ряда нормальных волн дополнительный интеграл по q простой заменой переменных приводится к интегралу Пуассона, который легко вычисляется.

В результате для поля точечного источника в трехмерном рефракционном волноводе получаем следующее интегральное представление:

$$u(R, z)=\mathrm{const}\int_0^\infty \exp\left\{i\left[\frac{kL-1}{2}p+\frac{kR^2}{2Lp}+\frac{z_1^2+z_2^2}{4}\operatorname{ctg} p-\frac{z_1z_2}{2\sin p}\right]\right\}\times$$

$$\times\left(1-e^{-2ip}\right)^{-1/2}p^{-3/2}\,dp. \quad (9)$$

Цилиндрическая система координат (R, z) выбрана таким образом, что источник находится на линии $R=0$.

Таким образом, звуковые поля в пространственном и плоском волноводах выражаются через схожие между собой интегралы (8), (9), достоинством которых является отсутствие специальных функций в подынтегральных выражениях, что позволяет эффективно применять их при численных расчетах. Важным преимуществом формул (8), (9) является и то, что они легко обобщаются на случай слабонерегулярных по трассе волноводов. Например, если считать параметры k и L зависящими от «медленной» переменной εx, где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, то, как нетрудно показать, главный член асимптотики по ε волнового поля может быть получен из (8) простой заменой kx^2/L на $\left(\int_0^x \sqrt{k(\varepsilon x)/L(\varepsilon x)}\,dx\right)^2$. Аналогичное утверждение справедливо и для пространства. В этом случае k и L можно считать функциями «медленных» переменных εR и $\varepsilon\varphi$ (φ – угол). Необходимо вначале построить центральное поле лучей, соответствующее функционалу $I=\int\sqrt{\frac{k(\varepsilon R, \varepsilon\varphi)}{L(\varepsilon R, \varepsilon\varphi)}}\,ds$, где s – длина дуги кривой, по которой ведется интегрирование. Затем $\sqrt{k/LR}$ нужно заменить на значение функционала I, вычисленного на экстремали, выходящей из точки, в которую помещен источник, и проходящей через точку наблюдения M (см. [10]).

Применение производящей функции (6) для произведения функций параболического цилиндра позволяет существенно упростить представление акустического поля в виде интеграла (3) или ряда (4). Полученная в работе формула (8) не содержит специальных функций и легко обобщается на случай плавнонерегулярных волноводов, что является важным с вычислительной точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. *Булдырев В. С.* Поле точечного источника в волноводе // Тр. МИАН. 1971. Т. 115. С. 78–102.
3. *Вешев Н. А.* Распространение звуковых волн вблизи оси рефракционного волновода // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 5. С. 667–670.
4. *Ludwig D.* Diffraction by a circular cavity // J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 5. P. 1617–1630.
5. *Кудряшов В. М.* Геометроволновой способ вычисления акустических полей в волноводе // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 5. С. 724–728.
6. *Филиппов В. Б.* Об одном методе расчета поля точечного источника в рефракционном волноводе // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 99. С. 146–156.
7. *Попов М. М.* Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 104. С. 195–216.
8. *Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А.* Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавно неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 79–88.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. 296 с.
10. *Бабич В. М.* О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 5. С. 949–951.

Ленинградский технологический институт
холодильной промышленности

Поступило в редакцию
4.V.1987