АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 2

УДК 534.231

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ДИСКОМ БЕЗ ЭКРАНА (ДИСКОМ В АКУСТИЧЕСКИ МЯГКОМ ЭКРАНЕ)

Шендеров Е. Л.

Получено решение задачи об излучении осциллирующего диска без экрана с произвольным распределением колебательной скорости. С использованием парных интегральных уравнений решение сведено к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода на конечном промежутке, допускающем эффективное численное решение. Выполнены расчеты для осциллирующих поршня и мембраны.

В 1937 г. Л. Я. Гутиным была решена задача об излучении звука круглым осциллирующим поршнем без экрана [1]. Решение получено путем разложения неизвестных функций в ряды по сферическим функциям. В работе [1] приведены значения коэффициентов рядов, пригодных для вычисления при сравнительно небольшом волновом размере излучателя и равномерном распределении колебательной скорости. При помощи разложения по сфероидальным функциям были решены также задачи о направленности одностороннего поршня в экране конечных размеров [2—5]. Имеется обширная литература, посвященная близкой задаче дифракции на диске. Применяющиеся здесь методы можно разбить на две группы — одна связана с разложением неизвестных полей в ряды по сфероидальным функциям, другая — с применением парных интегральных уравнений. Ряд задач о дифракции на диске был решен в работе [6] с применением разложений по сфероидальным функциям. Найдены характеристики электромагнитного излучения диска при его возбуждении плоской волной, а также электрическим и магнитным диполями. Систематическое изложение результатов исследования дифракции на диске этим методом и библиография имеются в книгах [7, 8], а также в предисловии к справочнику [9]. Несмотря на то что программы для вычисления сфероидальных функций являются достаточно сложными, метод позволяет выполнять на современных ЭВМ вычисления дальних дифракционных полей при значениях волнового радиуса (ka) равных нескольким сотням. К недостаткам метода можно отнести следующее. Сходимость рядов существенно ухудшается, если точки наблюдения и излучения находятся вблизи тела. Вместе с тем при определении акустического импеданса излучения необходимо вычислять именно ближнее поле. Трудности возникают также при неравномерном распределении колебательной скорости по поверхности. Это связано с необходимостью переразложения функций, описывающих колебательную скорость, по соответствующим системам сфероидальных функций, что приводит к необходимости вычисления сложных интегралов от осциллирующих функций. Кроме того, метод трудно применить для исследования излучения в упругую среду, а также в среду с потерями. В последнем случае потребовалось бы вычислять сфероидальные функции от комплексных значений.

Другой метод связан с составлением парных интегральных уравнений. Такие уравнения использовались в качестве исходных в классических работах по излучению из открытого конца волновода [10]. Парные уравнения, возникающие в задачах об излучении и дифракции звука диском, сводятся к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода. Практически без усложнений этот метод допускает численное решение для произвольного распределения скорости, позволяет вычислить поле на поверхности тела, а также в упругой среде и в среде с потерями. Метод хорошо согласуется с возможностями ЭВМ и не требует высокой точности промежуточных вычислений. Для его применения достаточно иметь лишь стандартные про-

граммы решения систем линейных алгебраических уравнений. Существует ряд работ, где парные интегральные уравнения использовались для решения задачи дифракции на диске. В работе [11] приведены парные уравнения, отличающиеся от записанных ниже уравнений (3) тем, что $\sqrt{1-s^2}$ стоит в знаменателе, а не в числителе. В ней без вывода приведено результирующее уравнение 2-го рода с более простым ядром (в виде комбинации гиперболических функций), чем выражение (15), но с более сложной правой частью. Следует отметить, что полученное в работе [11] уравнение может быть численно решено только при небольших значениях ka из-за экспоненциального роста (типа $\exp(2ka)$) ядра. В работе [12] с применением методов факторизации и весьма сложных преобразований получена высокочастотная асимптотика решения задачи дифракции на диске. В статье [13] рассматривается интегральное уравнение для задачи дифракции на диске, лежащем на границе раздела сред. При помощи парных уравнений решена задача о дифракции на круглой трещине в упругой среде [14]. Однако нам неизвестны работы, в которых содержалось бы аналитическое и численное решение задачи об излучении звука осциллирующим диском при помощи интегральных уравнений. Существующие численные результаты относятся почти исключительно к задаче дифракции (в частности, к вычислению рассеянных полей и поперечников рассеяния), а импедансы излучения, необходимые для расчета излучаемой мощности, вычислены лишь для равномерного распределения колебательной скорости [1, 5].

В связи с тем что указанная задача является одной из наиболее важных в теории излучения звука, представляет интерес получить решение путем применения интегрального уравнения, допускающего эффективное решение на ЭВМ в широком диапазоне волнового размера и произвольном (осесимметричном) распределении колебательной скорости.

Пусть диск радиуса a расположен в плоскости $z=0$, на его поверхности задана колебательная скорость $v(r)=v_0 f(r)$, где v_0 — скорость в центре диска. Для осциллирующего диска в плоскости $z=0$ при $r>a$ в силу антисимметрии относительно плоскости $z=0$ звуковое давление p должно обращаться в нуль. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$v_z=\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=0}=v(r) \quad \text{при } r<a; \quad p|_{z=0}=0 \quad \text{при } r>a. \tag{1}$$

Заметим, что те же граничные условия соответствуют диску с заданным распределением скорости, помещенному в акустически мягкий экран. Зависимость от времени выбрана в форме $\exp(-i\omega t)$, ρ — плотность среды, ω — угловая частота.

Будем искать звуковое давление в верхнем полупространстве ($z\geqslant 0$) в виде интеграла Фурье — Бесселя, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца и условию излучения:

$$p(r, z)=\frac{\rho c v_0}{k^2}\int_0^\infty P(\gamma)\, J_0(\gamma r)\, e^{i\sqrt{k^2-\gamma^2}\,z}\gamma\, d\gamma. \tag{2}$$

Множитель $\rho(v_0/k^2)$ введен для нормировки, $P(\gamma)$ — неизвестная функция. Из выражений (1), (2) получим систему парных интегральных уравнений. Перейдя к безразмерным переменным $s=\gamma/k$, $u=kr$, $\mu=ka$, запишем эту систему в виде

$$\int_0^\infty P(ks)\, J_0(us)\sqrt{1-s^2}\, s\, ds=f(u/k); \quad u<\mu, \tag{3а}$$

$$\int_0^\infty P(ks)\, J_0(us)\, s\, ds=0, \quad u>\mu. \tag{3б}$$

Будем решать уравнения (3а), (3б) следующим образом.

Умножим левую и правую части уравнения (3а) на $u/\sqrt{x^2-u^2}$ и проинтегрируем по u в пределах $(0, x)$. Поскольку в (3а) $u<\mu$, то и $x<\mu$.

Затем умножим левую и правую части (3б) на $u/\sqrt{u^2-x^2}$ и проинтегрируем в пределах (x, ∞). В этом уравнении $x>\mu$. Учтем формулы (6.554. 2, 3) справочника [15] и затем продифференцируем второе из уравнений по x.

Уравнения (3а), (3б) примут вид

$$\int_0^\infty P(ks)\sin(xs)\sqrt{1-s^2}\,ds=\psi_1(x);\quad x<\mu, \tag{4а}$$

$$\int_0^\infty P(ks)\sin(xs)\,s\,ds=0;\quad x>\mu, \tag{4б}$$

где

$$\psi_1(x)=\int_0^x \frac{f(u/k)\,u}{\sqrt{x^2-u^2}}\,du. \tag{5}$$

Левая часть выражения (4б) является функцией от x, которая равна нулю при $x>\mu$ и неизвестна при $x<\mu$. Обозначим эту неизвестную функцию через $g(x)$, т. е.

$$\int_0^\infty P(ks)\sin(xs)\,s\,ds=\begin{cases} g(x); & x<\mu;\\ 0 & x>\mu.\end{cases} \tag{6}$$

Выражение (6) задает связь между функциями P и g в виде интеграла Фурье. Обращая это соотношение, получим

$$P(ks)\,s=\frac{2}{\pi}\int_0^\mu g(x)\sin(xs)\,dx. \tag{7}$$

Подставим выражение (7) в уравнение (4а) и обозначим переменную интегрирования в интеграле (7) через y. Получим

$$\int_0^\mu g(y)\,U(x, y)\,dy=\psi_1(x);\quad x>\mu, \tag{8}$$

где

$$U(x, y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\sin(xs)\sin(ys)\,ds, \tag{9}$$

$U(x, y)$ является расходящимся интегралом, однако его можно представить в виде суммы δ-функции и сходящегося интеграла. Для этого прибавим и вычтем i к величине $\sqrt{1-s^2}/s$ и заметим, что

$$\delta(x-y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(xs)\sin(ys)\,ds.$$

В результате получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода на конечном промежутке с симметричным ядром:

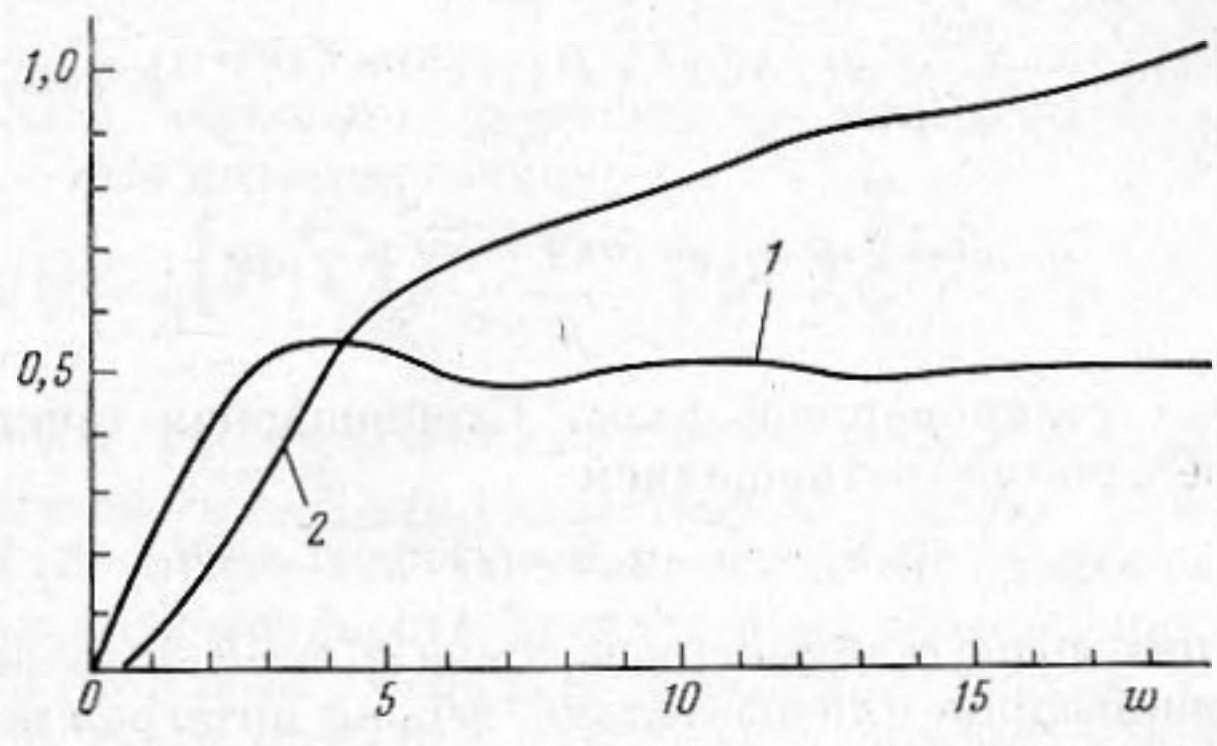
$$g(x)-\int_0^\mu g(y)\,K(x, y)\,dy=\psi(x);\quad 0\leqslant x\leqslant\mu; \tag{10}$$

$$K(x, y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(s)\sin(xs)\sin(ys)\,ds; \tag{11}$$

$$\varphi(x)=-i\int_0^x \frac{f(u/k)}{\sqrt{x^2-u^2}}\,du=-i\int_0^x f(\sqrt{x^2-\zeta^2}/k)\,d\zeta; \tag{12}$$

$$A(s)=\sqrt{1-s^2}/(is)-1. \tag{13}$$

При $s\to\infty$ $A(s)\approx-1/(2s^2)$, что обеспечивает абсолютную сходимость интеграла (11). Из вычислительных соображений его целесообразно привести к интегралу в конечных пределах. Это преобразование можно выполнить, переходя к интегрированию на комплексной плоскости s по петле, охватывающей разрез, который проведен из точки ветвления $s=1$ до точки $s=0$ и далее вверх по мнимой оси в направлении $s=i\infty$. При этом следует



Фиг. 1. Вещественная и мнимая части универсальной функции $F(w)$: *1* – $\mathrm{Re}\,F(w)$, *2* – $\mathrm{Im}\,F(w)$

учесть, что при переходе с одного берега разреза на другой функция $\sqrt{1-s^2}$ меняет знак. Опуская промежуточные преобразования, запишем результат

$$K(x,y)=-\frac{2}{\pi}\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,e^{isx}>\frac{\sin(sx_<)}{s}\,ds, \tag{14}$$

где $x_>$, $x_<$ – наибольшее и наименьшее из величин x, y соответственно. Заметим, что подынтегральное выражение не имеет особенностей при $s=0$.

При численном решении интегрального уравнения необходимо многократно вычислять значения ядра в точках $x=x_n$, $y=y_m$. Для упрощения расчетов целесообразно представить функцию двух переменных $K(x, y)$ через функцию одной переменной следующим образом:

$$K(x,y)=F(|x-y|)-F(x+y),$$

где

$$\mathrm{Re}\,F(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,\frac{\sin(sw)}{s}\,ds;$$

$$\mathrm{Im}\,F(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\sin^2(sw/2)\,ds. \tag{15}$$

Заметим, что функция $F(w)$ не зависит от вида правой части уравнения (10), т. е. от распределения колебательной скорости. Поэтому она является для данной задачи универсальной и может быть табулирована. Графики этой функции показаны на фиг. 1.

Интегральное уравнение (10) с ядром (15) определяет решение поставленной задачи. Если это уравнение численно решено и вспомогательная функция $g(x)$ найдена, то звуковое давление на поверхности можно определить из выражения (2) при $z=0$. Подставим в выражение (2) представление (7) и учтем формулу (6.671.7) справочника [15].

Тогда

$$p(r)=\frac{2\rho c v_0}{\pi}\int_{kr}^{\mu}\frac{g(x)\,dx}{\sqrt{x^2-(kr)^2}}=\int_0^{\sqrt{\mu^2-(kr)^2}}g_1\left(\sqrt{u^2+(kr)^2}\right)du, \tag{16}$$

где $g_1(x)=g(x)/x$.

Найдем звуковое давление в дальнем поле при $kR=k\sqrt{r^2+z^2}\gg 1$. Учитывая, что $J_0=(H_0^{(1)}+H_0^{(2)})/2$,

$$H_0^{(1),(2)}(\gamma r)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}}\,e^{\pm i(\gamma r-\pi/4)},$$

запишем

$$p(r,z)=\frac{\rho c v_0}{k^2\sqrt{2\pi r}}\left[e^{-i\pi/4}\int\limits_0^\infty P(\gamma)\,e^{i(\gamma r+\sqrt{k^2-\gamma^2}\,z)}\sqrt{\gamma}\,\alpha_\gamma+\right.$$

$$\left.+e^{i\pi/4}\int\limits_0^\infty P(\gamma)\,e^{i(-\gamma r+\sqrt{k^2-\gamma^2})}\sqrt{\gamma}\,d\gamma\right].$$

Применим метод стационарной фазы. Стационарная точка в первом из интегралов определяется соотношением

$$\gamma_0=k\sin\theta,\ \text{где}\ \sin\theta=r/\sqrt{r^2+z^2}=r/R.$$

Во втором интеграле стационарная точка $\gamma_0=-k\sin\theta_0$ лежит вне промежутка интегрирования. Следовательно, второй интеграл асимптотически равен нулю. В результате находим

$$p(R,\theta)=\frac{-i\rho c v_0}{kR}\cos\theta P(k\sin\theta)\,e^{ikR}\quad(kR\gg 1).$$

Подставив сюда представление (7), найдем

$$p(R,0)=\frac{-2i\rho c v_0}{\pi kR}\,e^{ikR}\int\limits_0^\mu g(x)\,\frac{\sin(x\sin\theta)}{\sin\theta}\,dx\quad(kR\gg 1).\tag{17}$$

Импеданс излучения на одну сторону диска определим в виде

$$Z_s=R_s+iX_s=\frac{1}{v_0^2}\iint\limits_S p(r)\,v^*(r)\,ds=\frac{2\pi}{v_0}\int\limits_0^a p(r)\,f^*(r)\,dr.\tag{18}$$

При таком определении Z_s излучаемая мощность (в полупространство) будет $W=v_0^2R_s/2$. Подставив в формулу (18) выражение (16), получим

$$Z_s=\frac{4\rho c}{k^2}\int\limits_0^\mu f(u/k)\left(\int\limits_u^\mu\frac{g(x)}{\sqrt{x^2-u^2}}\,dx\right)u\,du.$$

Воспользовавшись формулой для перемены порядка интегрирования в двойном интеграле, получим

$$Z_s=\rho c S\,\frac{4}{\pi\mu^2}\int\limits_0^\mu g(x)\,G(x)\,dx,\tag{19}$$

где

$$S=\pi a^2,\quad G(x)=\int\limits_0^x f(\sqrt{x^2-\zeta^2}/k)\,d\zeta.$$

Рассмотрим случай низких частот ($\mu\ll 1$) при равномерном распределении колебательной скорости, т. е. $f(r)=1$. В выражении (14) при этом можно считать $x_>$, $x_<\ll 1$. Поэтому

$$K(x,y)\approx-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\sqrt{1-s^2}\,(1+isx_>)\,x_<\,ds=-\frac{x_<}{2}-\frac{2i}{3\pi}\,xy.$$

Правая часть уравнения (10) будет $\psi(x)=-ix$. Интегральное уравнение (10) приобретает вид

$$g(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^x yg(y)\,dy-\frac{x}{2}\int\limits_x^\mu g(y)\,dy-\frac{2ix}{3\pi}\int\limits_0^\mu yg(y)\,dy=-ix.\tag{20}$$

Это уравнение может быть решено точно после двукратного дифференцирования по x. Однако проще найти приближенное решение, положив $g(x) \approx Ax$. Подставив эту функцию в последнее уравнение и пренебрегая в мнимой части квадратичными членами, получим

$$(gx) \approx \left(\frac{2\mu^3}{9\pi} - i\right) x \quad (\mu \ll 1) \tag{21}$$

Распределение звукового давления на поверхности определится по формуле (16) после интегрирования

$$p(r) = \rho c v_0 \left(\frac{4\mu^3}{9\pi^2} - \frac{2i}{\pi}\right) \sqrt{\mu^2 - (kr)^2} \quad (\mu \ll 1). \tag{22}$$

Таким образом, распределение звукового давления на поверхности описывается функцией $\sqrt{a^2 - r^2}$, что удовлетворяет условию Мейкснера на краю.

В работе [16] приведена низкочастотная асимптотика распределения звукового поля по поверхности диска в виде разложения по степеням μ, основной член которого совпадает с мнимой частью выражения (22). Несмотря на то что в мнимой части были удержаны члены вплоть до μ^5, вещественная часть, пропорциональная μ^3, в этой статье вообще опущена. Между тем именно вещественная часть необходима для вычисления активной составляющей импеданса излучения и акустической мощности.

Импеданс излучения вычислим по формуле (19). В этом случае $G(x) = x$. После интегрирования получим формулы Л. Я. Гутина:

$$R_s = \rho c S \frac{8\mu^4}{27\pi^2}; \quad X_s = -\rho c S \frac{4\mu}{3\pi} \quad (\mu \ll 1). \tag{23}$$

Для вычисления звукового давления в дальнем поле воспользуемся формулами (17) и (21) при $\mu \ll 1$. Тогда

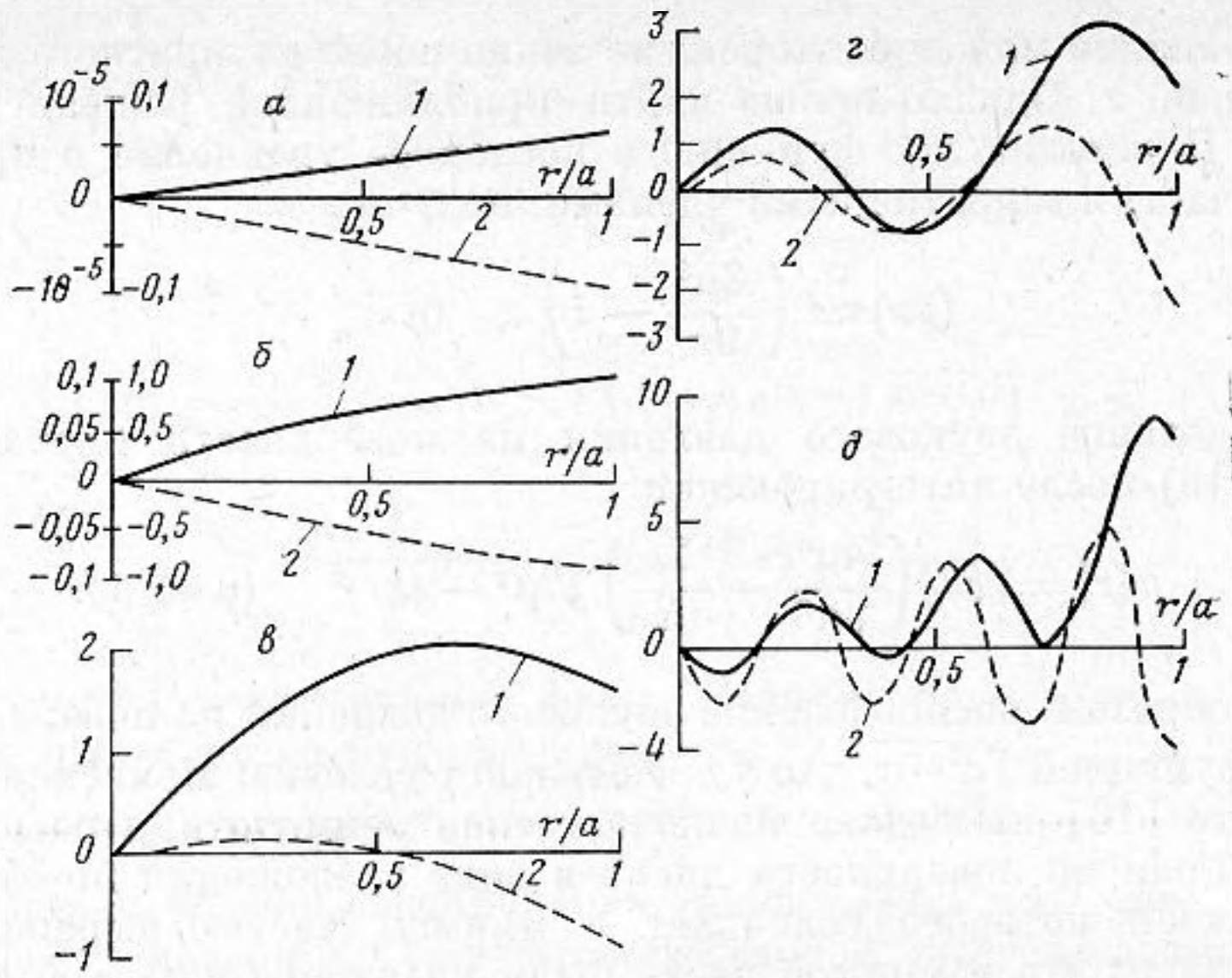
$$p(R, \theta) = -\rho c v_0 \frac{2\mu^3}{3\pi} \frac{e^{ikR}}{kR} \cos\theta, \tag{24}$$

что также совпадает с результатом Л. Я. Гутина.

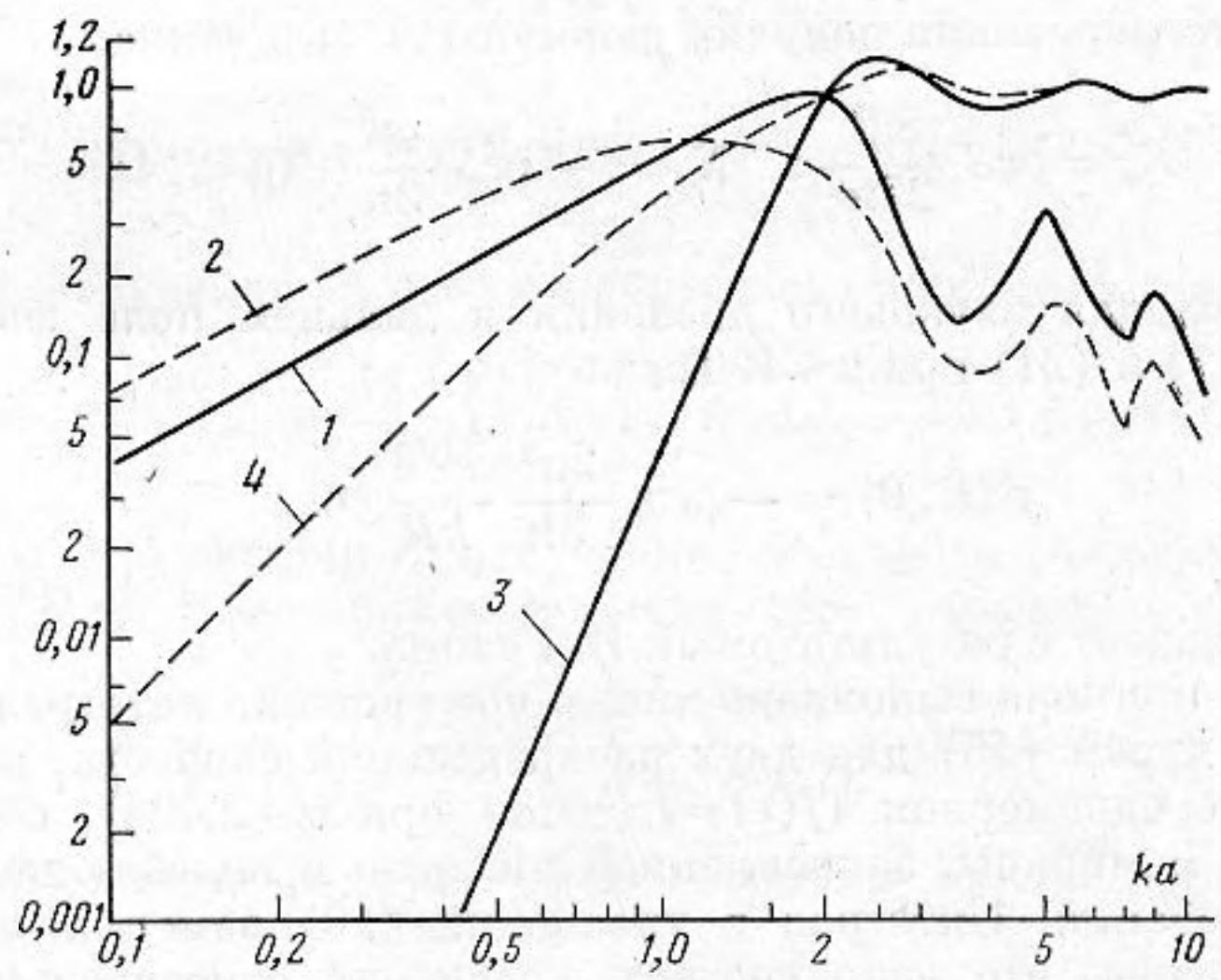
В качестве примера выполнено численное решение интегрального уравнения (10) с ядром (15) для двух распределений скорости: равномерном ($f(r) = 1$) и неравномерном ($f(r) = J_0(\alpha r/a)$ при $\alpha = 2{,}404$), соответствующем скорости мембраны, закрепленной на краю и колеблющейся на первой моде колебаний. Интеграл в уравнении (10) заменялся суммой по правилу Симпсона, что дало систему уравнений относительно значений функции g_n в узлах $x_n = \Delta x(m-1)$:

$$g_n + \sum_{m=1}^{N} \alpha_m g_m K(x_n, y_m) \Delta x = f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots N,$$

$\Delta x = ka/(N-1)$ — шаг дискретизации, $\alpha_m = {}^1/_3$ при $m=1$ и $m=N$, остальные α_m равны ${}^2/_3$ или ${}^4/_3$ по правилу Симпсона, N — нечетное число (опыт решения уравнения (10) с заменой интеграла суммой по правилу прямоугольников и правилу Симпсона показал значительное преимущество последнего с точки зрения уменьшения порядка системы уравнений). Число точек разбиения интервала определялось из условия $N = 5 + 2E(Qka/4\pi)$, где E — целая часть числа, Q — количество узлов на одну длину волны. Таким образом, минимальное число точек при малых ka составляло $N=5$ и постепенно увеличивалось при возрастании ka. Установлено, что достаточно взять $Q=10$ для получения трех верных знаков результата. Перед составлением системы уравнений табулировалась функция $F(w)$ и значения функции $K(x, y)$ в узлах определялись по таблице путем интерполяции. Время счета на ЭВМ ЕС-1060 составляло не более нескольких секунд при $ka \sim 20$ и долей секунды при $ka < 5$.



Фиг. 2. Вещественная и мнимая части функции $g(x)$ для излучателя с равномерным распределением скорости: *1* – $\mathrm{Re}\, g(x)$, *2* – $\mathrm{Im}\, g(x)$; *а* – $\mu=0{,}1$, *б* – $\mu=1$, *в* – $\mu=3$, *г* – $\mu=10$, *д* – $\mu=20$



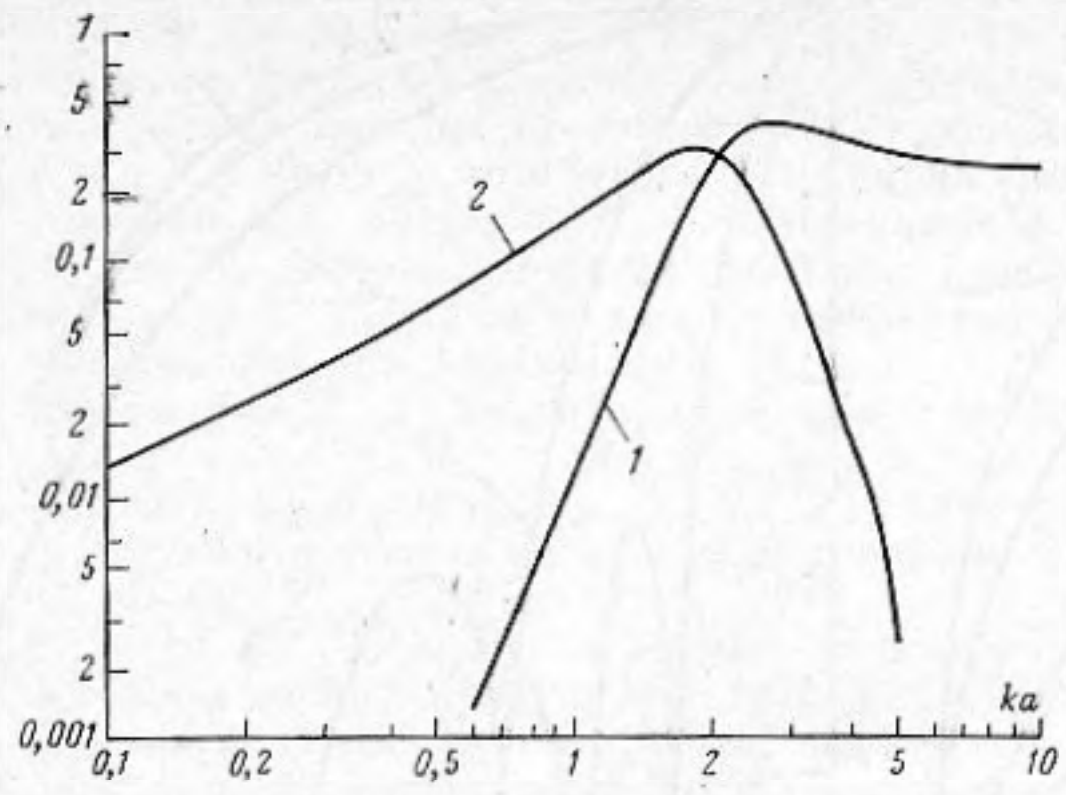
Фиг. 3. Импеданс излучения осциллирующего поршня и поршня в жестком экране: *1* – $R_s/(\rho cS)$ для осциллирующего поршня, *2* – то же для поршня в жестком экране, *3* – $-X_s/(\rho cS)$ для осциллирующего поршня, *4* – то же для поршня в жестком экране

На фиг. 2 показана функция $g(x)$ для излучателя с равномерным распределением скорости. При малых μ зависимость близка к линейной в соответствии с формулой (21). Графики на фиг. 3 дают возможность сравнить импедансы излучения осциллирующего поршня и поршня в жестком экране. Последние рассчитывались по известным формулам:

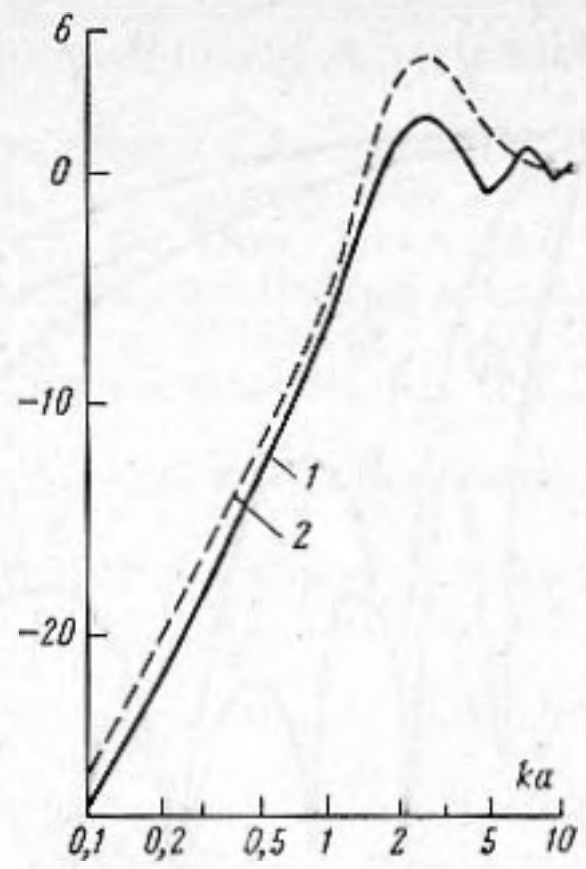
$$R_s/(\rho cS)=1-2J_1(2ka)/(2ka); \quad X_s/(\rho cS)=-S_1(2ka)/(ka),$$

S_1 – функция Струве.

Результаты расчетов импеданса излучения были сопоставлены с результатами работы [1], а также статьи [5] в предельном случае при ширине экрана равной нулю. Значения, полученные разными способами, с графической точностью совпали. Контролем правильности численных результатов является также их совпадение с низкочастотными и высокочастотными асимптотиками.



Фиг. 4. Импеданс излучения осциллирующей мембраны: *1* – $R_s/(\rho cS)$, *2* – $-X_s/(\rho cS)$



Фиг. 5. Относительное звуковое давление на оси: *1* – поршень, *2* – мембрана

График $R_s/(\rho cS)$ для осциллирующей мембраны (фиг. 4) стремится к величине 0,27. Это соответствует значению, которое можно получить, если считать, что при $ka>5$ распределения скорости и давления примерно совпадают (см. фиг. 7, *б*), причем $p(r)\approx\rho c v_0 f(r)$. В этом случае

$$R_s \approx \rho c 2\pi \int_0^a J_0^2(\alpha r/a)\, r\, dr = \rho c S\, [J_0^2(\alpha) + J_1^2(\alpha)],$$

что при $\alpha=2{,}404$ дает $R_s/(\rho cS)=J_1^2(\alpha)=0{,}27$.

На фиг. 5 показано отношение $|p/p_0|$, где p и p_0 – звуковые давления на оси осциллирующего диска и диска в жестком экране соответственно. Для диска в жестком экране

$$p_0 = \frac{-ik\rho c v_0}{2\pi}\,\frac{e^{ikR}}{R}\iint_S f(r)\, dS. \qquad (25)$$

Из формул (17), (25) получим

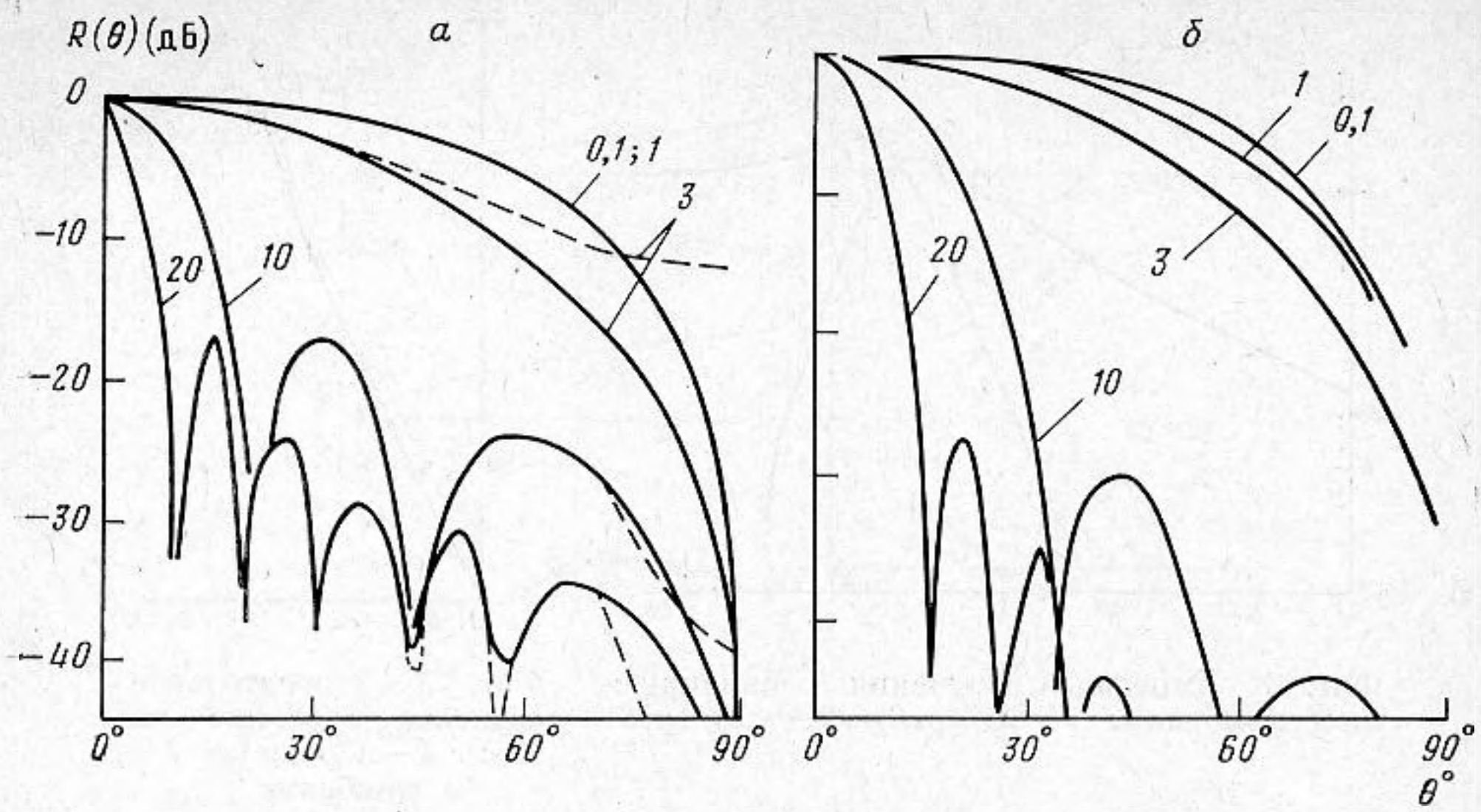
$$|p/p_0| = \left| \frac{4}{\pi\mu^2}\int_0^\mu g(x)\, x\, dx \Big/ \left(\frac{2}{\mu^2}\int_0^\mu f(u/k)\, u\, du\right)\right|.$$

Нормирующая величина после наклонной черты в последнем выражении равна 1 для диска с равномерным распределением скорости и $2J_1(\alpha)/\alpha$ – для осциллирующей мембраны. При $\mu>5$ отношение $|p/p_0|$ быстро стремится к 1. Характеристики направленности $D(\theta)=|p(\theta)/p(0)|$ при $\mu=0{,}1$ и 1 (фиг. 6) почти не отличаются от функции $D(\theta)=\cos\theta$. При $ka>10$ различия между кривыми для диска в жестком экране и диска без экрана заметны лишь вблизи углов близких к 90°.

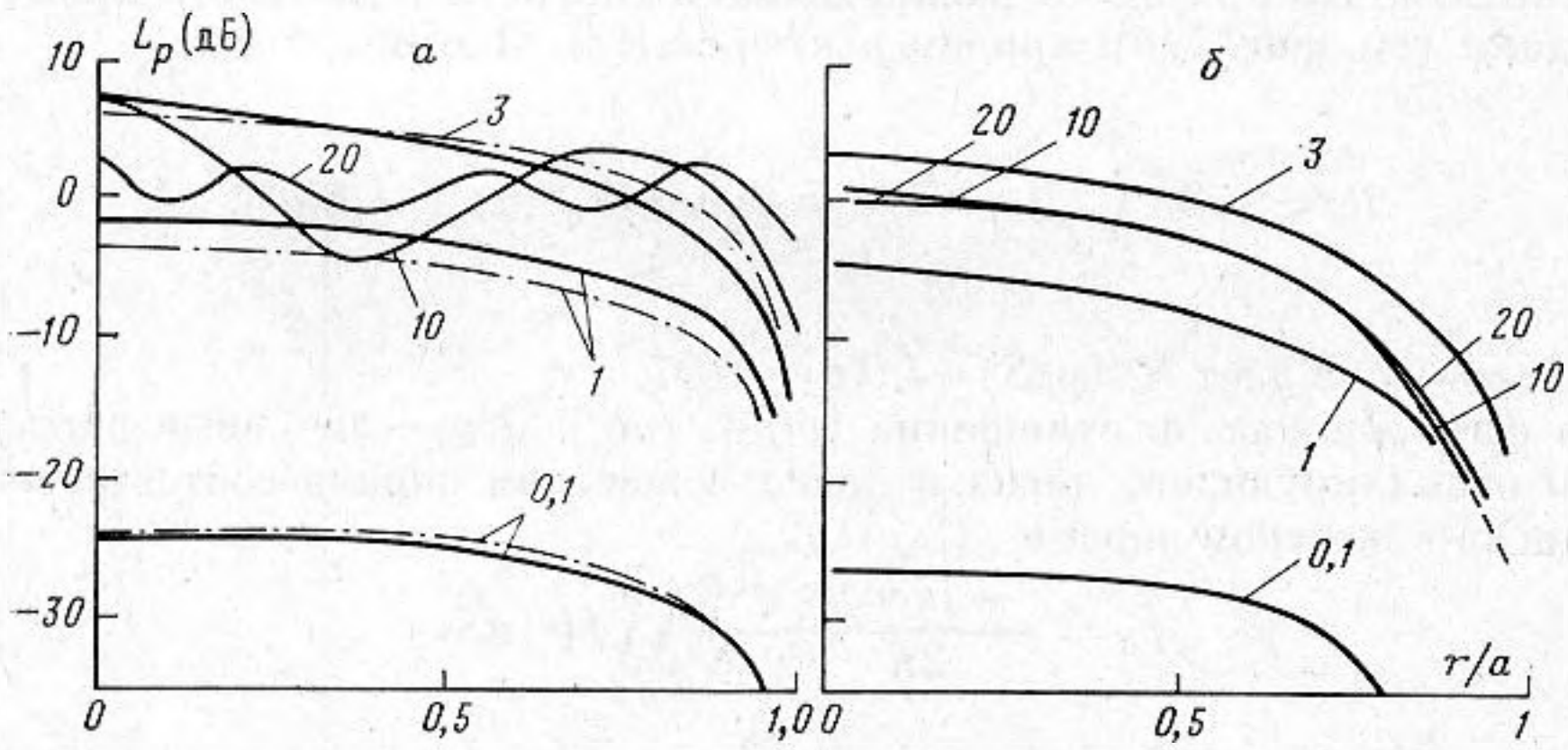
На фиг. 7 показано распределение звукового давления вдоль радиуса. При $ka<1$ распределение давления хорошо описывается функцией (22). С увеличением μ звуковое давление на оси диска с равномерным распределением скорости стремится к давлению в плоской волне. Для осциллирующей мембраны уже при $\mu>5$ распределение давления оказывается весьма близким к распределению колебательной скорости (фиг. 7, *б*).

Заметим, что приведенное решение дает возможность вычислить также поле осциллирующего диска радиусом a_1, расположенного в кольцевом жестком экране с внешним радиусом a. Для этого достаточно принять

$$f(r) = \begin{cases} 1 \text{ при } & r < a_1, \\ 0 \text{ при } & a_1 < r < a. \end{cases}$$



Фиг. 6. Характеристики направленности осциллирующего поршня (*а*) и мембраны (*б*). Числа около кривых указывают значения параметра $\mu = ka$, штриховые линии – графики функции $20 \lg |2J_1(\mu \sin \theta)/(\mu \sin \theta)|$



Фиг. 7. Распределение звукового давления $L_p = 20 \lg |p/(\rho c v_0)|$ на поверхности осциллирующего поршня (*а*) и мембраны (*б*). Числа около кривых указывают значения параметра $\mu = ka$. Штрихпунктирные линии – графики функции (22) в дБ. Штриховая линия на фиг. 7, *б* – график функции $20 \lg |J_0(\alpha r/a)|$

Уравнение (10) при этом останется без изменений, а правая часть по формуле (12) примет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} -ix, & x < ka_1; \\ -i(x - \sqrt{x^2 - (ka_1)^2}, & x > ka_1. \end{cases}$$

Можно получить также решение и для неосесимметричного распределения скорости, если воспользоваться методом решения парных интегральных уравнений, включающих функции Бесселя с ненулевым индексом, изложенным в статье [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутин Л. Я.* О звуковом поле поршневых излучателей // ЖТФ. 1937. Т. 7. № 10. С. 1096–1106.
2. *Шабров А. А.* Направленность одностороннего поршня в экране конечных размеров с переменным импедансом // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 1. С. 114–117.
3. *Шабров А. А.* Излучение концентрического с жестким экраном плоского поршня // Вопр. судостроения. Сер. общетехническая. 1976. В. 22. С. 34–41.
4. *Шабров А. А.* Направленные свойства одностороннего поршня в локально-импедансном экране конечных размеров // Вопр. судостроения. Сер. общетехническая. 1976. В. 46. С 40–46.

5. *De Vore R. V., Hodge D. B., Kouymjlan.* Radiation by finite circular pistons, imbedded in a rigid circular baffle. I. Eigenfunctions solutions // Journ. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 48. № 5. Part 2. P. 1128–1134.
6. *Белкина М. Г.* Дифракция электромагнитных волн диска // Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М.: Сов. радио, 1957. С. 148–174.
7. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. *Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E.* Electromagnetic and acoustic scattering by Simples Shapes. New-York, Amsterdam; John Wiley-Inc., 1969.
9. *Фламмер К.* Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1962. Библиотека мат. таблиц. Вып. 17.
10. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 431 с.
11. *Ахиезер Н. И., Ахиезер А. Н.* К задаче о дифракции электромагнитных волн у круглого отверстия в плоском экране // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 1. С. 53–56.
12. *Сологуб В. Г.* Коротковолновая асимптотика решения задачи о дифракции на круглом диске // ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12. № 2. С. 382–412.
13. *Иванов Е. А.* Об одной краевой задаче теории дифракции волн, решаемой методом парных уравнений // Дифф. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1898–1900.
14. *Achenbach J. D., Gautesen A. K., McMaken H.* Ray methods for waves in elastic solids. With application to scattering by cracks. Boston – London; Pitman, 1982.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
16. *Crane P. H. G., Miles P.* Axial fields of an oscillating disk and of an unbaffled disk radiating from one face // Journ. Sound and Vibr. 1970. V. 12. № 2. P. 181–185.
17. *Noble B.* The solution of Bessel functions dual integral equations by multiplying-factor method // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1963. V. 59. Pt 2. P. 351–362.

Поступила в редакцию
12.XII.1986