АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 2

УДК 534.

УЧЕТ СЖИМАЕМОСТИ ЖИДКОСТИ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ПОЛЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

Дойников А. А., Завтрак С. Т.

В сжимаемой жидкости скорость звука конечна, и потенциал акустического поля, рассеиваемого пузырьками, удовлетворяет в случае монохроматической падающей волны не уравнению Лапласа, а уравнению Гельмгольца. Следствием этого является возникновение дальнодействующей и тангенциальной составляющих силы Бьеркнеса.

Известные методы решения в акустическом приближении задачи о взаимодействии двух газовых пузырьков в жидкости (см., например, [1–6]) основаны на двух допущениях. Во-первых, предполагается, что во время пульсаций пузырьки сохраняют свою сферическую форму. Это справедливо только при условии, что радиусы пузырьков $R_{1,2}$ много меньше расстояния l между их равновесными центрами. Во-вторых, считается, что жидкость не сжимаема, что эквивалентно условию $\lambda \gg l$, где λ – длина падающей звуковой волны в жидкости.

В работе [7] было построено точное решение этой задачи при условии $\lambda \gg l$ с учетом искажения сферической формы поверхностей пузырьков и показано, что на близких расстояниях сила Бьеркнеса существенно отличается от рассчитанной по известной приближенной формуле [1–6]. Поэтому представляется интересным применить метод, использованный в [7], для решения задачи, но уже с учетом сжимаемости жидкости, который проявляется в том, что рассеянные пузырьками волны распространяются от одного пузырька к другому за конечное время, т. е. запаздывают. Сказанное означает, что в случае монохроматической волны потенциал поля φ, рассеянного пузырьками, удовлетворяет не уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$, как это имеет место в цитируемых работах, а уравнению Гельмгольца $\Delta\varphi+k^2\varphi=0$.

В данной статье предложено решение задачи при условиях $l \gg R_{1,2}$ и $kR_{1,2} \ll 1$ ($k=2\pi/\lambda$ – величина волнового вектора). В сравнении с l длина волны λ может быть произвольной. Показано, что учет сжимаемости жидкости приводит по крайней мере к трем следствиям: появлению дальнодействующей составляющей силы Бьеркнеса, обратно пропорциональной l; зависимости знака этой силы не только от разности фаз вынужденных пульсаций пузырьков, но и от фазы запаздывания kl; появлению тангенциальных составляющих сил Бьеркнеса.

Рассмотрим два газовых пузырька с невозмущенными радиусами R_1 и R_2, помещенных в жидкости с плотностью ρ. Через A, ω и $\mathbf{k}$ обозначим соответственно амплитуду, круговую частоту и волновой вектор падающей плоской волны давления $P_{ac}=A\sin(\mathbf{kr}-\omega t)$.

Потенциал поля скоростей жидкости, обусловленный вынужденными пульсациями пузырьков и удовлетворяющий уравнению Гельмгольца, представим так же, как и в работе [7], в виде суммы сферических волн от источников, расположенных внутри пузырьков:

$$\varphi=\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)}\frac{\cos(kr_m^{(1)}-\omega t+\alpha_m^{(1)})}{r_m^{(1)}}+\sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)}\frac{\cos(kr_m^{(2)}-\omega t+\alpha_m^{(2)})}{r_m^{(2)}}. \quad (1)$$

В системе координат (x_1, y_1, z_1), начало которой расположено в равновесном центре 1-го пузырька, а ось z_1 направлена вдоль линии, соединяющей центры пузырьков, расстояния $r_m^{(1)}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+(z_1-h_m^{(1)})^2}$ и $r_m^{(2)}=$

$=\sqrt{x_1^2+y_1^2+(z_1-h_m^{(2)})^2}$. Источники расположены на оси z_1 в точках $h_m^{(1)}$ и $h_m^{(2)}$ ($m=0, 1, 2\ldots$; верхние индексы означают номер соответствующего пузырька). Числа $a_m^{(1)}$ и $a_m^{(2)}$ пропорциональны A и характеризуют амплитуды источников, $\alpha_m^{(1)}$ и $\alpha_m^{(2)}$ — их фазы. На координаты источников налагаются условия $|h_m^{(1)}|<R_1$ и $|l-h_m^{(2)}|<R_2$, связанные со стремлением избежать сингулярностей.

Вблизи поверхности 1-го пузырька $kr_m^{(1)}\ll 1$, $kr_m^{(2)}\simeq kl$, поэтому стоящие под знаком суммы (1) выражения сводятся к производящей функции полиномов Лежандра [8] и потенциал φ в сферических координатах R и θ, связанных с 1-м пузырьком, представляется в виде разложения

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}[\mu_n^{(1)}(R, t)+\nu_n^{(1)}(R, t)]\,P_n(\cos\theta), \tag{2}$$

$$\mu_n^{(1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m^{(1)}}{R}\left(\frac{h_m^{(1)}}{R}\right)^n\cos(-\omega t+\alpha_m^{(1)}),$$

$$\nu_n^{(1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m^{(2)}}{h_m^{(2)}}\left(\frac{R}{h_m^{(2)}}\right)^n\cos(kl-\omega t+\alpha_m^{(2)}). \tag{3}$$

Падающая звуковая волна вблизи 1-го пузырька $P_{ac}\simeq A\sin(-\omega t)$. Движение жидкости описывается уравнением Громека — Ламба [9]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{(\nabla\varphi)^2}{2}=-\frac{P-P_0}{\rho}, \tag{4}$$

которое справедливо и на поверхности пузырьков. В этом случае P — давление газа в соответствующем пузырьке. В случае малых колебаний, например для 1-го пузырька, имеем

$$P=P_0-\gamma\frac{P_0}{\Omega_1}\delta\Omega_1, \tag{5}$$

где γ — постоянная адиабаты газа, содержащегося в нем, $\Omega_1=\frac{4\pi}{3}R_1^3$ — равновесный объем пузырька,

$$\delta\Omega_1=2\pi R_1^2\int_0^{\pi}\delta R_1(\theta, t)\sin\theta\,d\theta \tag{6}$$

— изменение его объема, $\delta R_1(\theta, t)$ — изменение радиуса в направлении, определяемом углом θ, которое связано со скоростью границы пузырька соотношением

$$\frac{d}{dt}\delta R_1(\theta, t)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right|_{R=R_1}. \tag{7}$$

В формуле (4) пренебрегаем силой поверхностного натяжения, считая пузырьки не слишком маленькими.

В акустическом приближении квадратичными по полю членами $(\nabla\varphi)^2$ в уравнении (4) пренебрегают, оставляя только линейные. Подставим потенциал (2) и давление (5) в это уравнение, учитывая, что наряду со статической частью давление P_0 содержит в себе также и давление падающей волны. Заметим также, что правая часть соотношения (4) не зависит от углов. В результате имеем

$$\mu_n^{(1)}(R_1, t)+\nu_n^{(1)}(R_1, t)=0, \quad \text{при } n=1, 2, 3\ldots \tag{8}$$

Получающееся при $n=0$ уравнение будет рассмотрено ниже.

Аналогичные рассуждения можно провести и для 2-го пузырька. Для этого надо ввести новую систему координат: $x_2=x_1$, $y_2=-y_1$, $z_2=l-z_1$, т. е. рассмотреть задачу с точки зрения наблюдателя, расположенного теперь уже в центре 2-го пузырька. В новой системе координат компоненты вол-

нового вектора $k_x'=k_x$, $k_y'=-k_y$, $k_z'=-k_z$. Вблизи 2-го пузырька падающая волна $P_{ac}=A\sin(\mathbf{kr}-\omega t)=A\sin(\mathbf{k'r}_2-\omega t+k_z l)\approx A\sin(-\omega t+k_z l)$, а потенциал скоростей φ имеет такой же вид, как и (2), только

$$\mu_n^{(2)}=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m^{(1)}}{(l-h_m^{(1)})}\left(\frac{R}{l-h_m^{(1)}}\right)^n\cos(kl-\omega t+\alpha_m^{(1)}),$$
$$\nu_n^{(2)}=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m^{(2)}}{R}\left(\frac{l-h_m^{(2)}}{R}\right)^n\cos(-\omega t+\alpha_m^{(2)}). \tag{9}$$

В данном случае R – расстояние от равновесного центра 2-го пузырька. Подстановка потенциала и давлений в соотношении (4) также приводит к бесконечной системе уравнений:

$$\mu_n{}^{(2)}(R_2,t)+\nu_n{}^{(2)}(R_2,t)=0 \quad \text{при } n=1,2,3\ldots \tag{10}$$

Разрешая уравнения (8) и (10), приходим к системе рекуррентных соотношений для координат источников, их фаз и амплитуд:

$$h_{m+1}^{(1)}=\frac{R_1{}^2}{h_m^{(2)}},\quad \alpha_{m+1}^{(1)}=\alpha_m^{(2)}+kl,\quad a_{m+1}^{(1)}=-\frac{R_1}{h_m^{(2)}}a_m^{(2)},$$
$$l-h_{m+1}^{(2)}=\frac{R_2{}^2}{l-h_m^{(1)}},\quad \alpha_{m+1}^{(2)}=\alpha_m^{(1)}+kl,\quad a_{m+1}^{(2)}=-\frac{R_2}{l-h_m^{(1)}}a_m^{(1)}, \tag{11}$$

причем $h_0{}^{(1)}=0$, $h_0{}^{(2)}=l$. Эти соотношения значительно упрощаются, когда $R_1=R_2$: $h_m{}^{(2)}=l-h_m{}^{(1)}$, $h_{m+1}^{(1)}=R_1{}^2/(l-h_m{}^{(1)})$. Методом индукции легко доказывается, что координаты источников $0\leqslant h_m{}^{(1)}<R_1$, $0\leqslant l-h_m{}^{(2)}<R_2$.

В дальнейшем для упрощения расчетов ограничимся случаем $R_1=R_2$.

При $n=0$ получается система четырех трансцендентных уравнений для определения амплитуд $a_0{}^{(1)}$, $a_0{}^{(2)}$ и фаз $\alpha_0{}^{(1)}$, $\alpha_0{}^{(2)}$, которую не будем выписывать ввиду громоздкости. Ее точное решение для всех значений kl и $k_z l$ получить, как оказалось, невозможно. Отметим только, что при условии $kl\ll 1$ решение системы переходит в приведенное в [7].

Вспоминая теперь, что задача рассматривается при $\xi=R_1/l\ll 1$, выпишем результат приближенного решения указанной системы с точностью до членов 1-го порядка малости по параметру ξ:

$$a_0^{(1)}=-\frac{AR_1}{\rho\omega\left(\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}-1\right)}\left\{1+\xi\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}\frac{\cos(kl+k_z l)}{\left(\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}-1\right)}\right\},$$
$$\alpha_0^{(1)}=\xi\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}\frac{\sin(kl+k_z l)}{\left(\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}-1\right)},$$
$$a_0^{(2)}=-\frac{AR_1}{\rho\omega\left(\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}-1\right)}\left\{1+\xi\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}\frac{\cos(kl-k_z l)}{\left(\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}-1\right)}\right\},$$
$$\alpha_0^{(2)}=k_z l+\xi\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}\frac{\sin(kl-k_z l)}{\left(\frac{\omega_1{}^2}{\omega^2}-1\right)}.$$

Здесь $\omega_1=\sqrt{3\gamma P_0/\rho R_1{}^2}$ – резонансная круговая частота пузырьков [1–7, 10].

С помощью соотношений (2), (7) нетрудно вычислить скорости поверхностей пузырьков, а также изменения радиусов $\delta R_{1,2}(\theta,t)$ во времени.

Для определения силы Бьеркнеса составим полный лагранжиан:

$$L=T-U-U_n=\frac{\rho}{2}\int(\nabla\varphi)^2\,d\Omega-\int\frac{P^{12}}{2\rho c_0{}^2}\,d\Omega+\int\limits_{(1,2)}(P-P_0)\,d\Omega', \tag{12}$$

где T и U — соответственно кинетическая и потенциальная энергия жидкости (интегрирование ведется по всему объему, занимаемому жидкостью), U_n — потенциальная энергия пузырьков (интегрирование ведется по изменениям их объемов, кинетической энергией газов пренебрегается), $P'=-\rho\dot{\varphi}$ — давление рассеянной волны, c_0 — скорость звука в чистой жидкости. Давление P_0 содержит в себе помимо статической части также и давление падающей волны. Используя уравнение Гельмгольца, преобразуем выражение для T в поверхностные и объемный интегралы:

$$T=-\frac{\rho}{2}\int\limits_{(1,2)}\varphi\nabla\varphi\,d\mathrm{S}+\frac{\rho}{2}\int\limits_{(K)}\varphi\nabla\varphi\,d\mathrm{S}+\frac{k^2\rho}{2}\int\varphi^2\,d\Omega. \qquad (13)$$

В первом члене (13) интегрирование выполняется по поверхностям обоих пузырьков (вектор нормали направлен в жидкость), во втором — по внешней поверхности объема, в который заключена жидкость (например, по поверхности сферы большого радиуса $R\gg l$, λ). Во втором случае вектор нормали направлен от жидкости.

Вычисляя L с точностью до квадратичных по полю членов и усредняя по времени, нетрудно убедиться в том, что третий член в (13) компенсирует потенциальную энергию U жидкости, а второй член в (13) является величиной первого порядка малости по параметру kR_1 в сравнении с остальными вкладами. Ограничиваясь первым приближением по параметру $\xi=R_1/l$, получаем

$$\langle L\rangle=\langle L_0\rangle+\frac{2\pi A^2{R_1}^2\cos(kl)\cos(k_zl)}{\rho\omega^2\left(\frac{{\omega_1}^2}{\omega^2}-1\right)^2 l},$$

где $\langle L_0\rangle$ не зависит от l.

Уже из одного вида $\langle L\rangle$ можно сделать ряд интересных выводов. Во-первых, $\langle L\rangle$ зависит не только от расстояния l между пузырьками, но и от фаз kl и k_zl. Это означает, что наряду с короткодействующей силой Бьеркнеса, обратно пропорциональной l^2, должна возникать дальнодействующая, обратно порпорциональная l (в дальней зоне рассеяния, где $kl\gg1$). Действительно, вычисляя силу Бьеркнеса по формуле (40.6) [11] $F_B=\partial\langle L\rangle/\partial l$, имеем

$$F_B^{(2)}=-\frac{2\pi A^2{R_1}^2\cos(kl)\cos(k_zl)}{\rho\omega^2l^2\left[\left(\frac{{\omega_1}^2}{\omega^2}-1\right)^2+\delta^2\right]}-$$

$$-\frac{2\pi A^2{R_1}^2}{\rho\omega^2l\left[\left(\frac{{\omega_1}^2}{\omega^2}-1\right)^2+\delta^2\right]}[k\sin(kl)\cos(k_zl)+k_z\cos(kl)\sin(k_zl)].$$

Здесь феноменологически учтено [4, 7, 10] поглощение путем введения в знаменатель постоянной затухания δ.

Первый член в последней формуле при $kl\ll1$ переходит в обычную силу притяжения Бьеркнеса [1—7], ибо такое условие означает синфазность вынужденных колебаний пузырьков. Второй член — дальнодействующий. Индекс 2 означает, что эта сила действует на 2-й пузырек.

Во-вторых, знак этой силы зависит не только от разности фаз k_zl вынужденных пульсаций пузырьков [1—6], но и от фазы запаздывания kl.

В-третьих, $\langle L\rangle$ зависит от угла $\theta=\arccos(k_z/k)$ между волновым вектором $\mathbf{k}$ и осью z, проходящей через центры пузырьков. Это означает нарушение осевой симметрии задачи и должно приводить к появлению тангенциальной составляющей силы Бьеркнеса. Для ее определения мысленно сместим 2-й пузырек в плоскости $(\mathbf{k}, z)$ на малый угол $\delta\theta$ при неизменном l. Такое смещение эквивалентно замене $\theta\to\theta-\delta\theta$. Тангенцианльная составляющая силы Бьеркнеса

$$F_T^{(2)}=\lim_{\delta\vartheta\to0}\frac{\langle L(\theta-\delta\theta)\rangle-\langle L(\theta)\rangle}{l\delta\theta}=-\frac{1}{l}\frac{\delta\langle L\rangle}{\partial\theta}.$$

Вычисления дают

$$F_T^{(2)} = -\frac{2\pi A^2 R_1^2 k \sin\theta \cos(kl) \sin(k_z l)}{\rho\omega^2 l \left[\left(\frac{\omega_1^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \delta^2\right]}. \qquad (14)$$

Аналогично

$$F_T^{(1)} = -F_T^{(2)}.$$

Интересно сравнить величину этой силы с силой радиационного давления, которая в рассматриваемом случае [2, 6, 12] одинакова для обоих пузырьков: $\mathbf{F}_r = 2\pi R_1 A^2 \delta k / \rho\omega^2 [(\omega_1^2/\omega^2 - 1)^2 + \delta^2]$.

Отношение этих сил по порядку величины равно $|\mathbf{F}_T| / |\mathbf{F}_r| \sim \xi/\delta$.

Отметим также, что если под действием сил радиационного давления оба пузырька сносятся как одно целое, то наличие тангенциальных составляющих приводит к вращению всей системы. Взаимодействующие пузырьки стремятся занять такое положение, при котором тангенциальная составляющая равна 0. При этом ось, соединяющая центры пузырьков, может расположиться либо параллельно волновому вектору, либо перпендикулярно ему. Это будет зависеть от знака сомножителя $\cos(kl)\sin(k_z l)$ в формуле (14). Если знак «−», имеет место первый случай, если «+» — второй. Оба положения устойчивы, потому что при прохождении системой положения равновесия тангенциальная составляющая меняет знак и стремится вернуть систему в положение равновесия.

При малых kl для $F_T^{(2)}$ получаем следующее асимптотическое выражение:

$$F_T^{(2)} = -\frac{\pi A^2 R_1^2 k^2 \sin(2\theta)}{\rho\omega^2 \left[\left(\frac{\omega_1^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \delta^2\right]}.$$

Из этой формулы видно, что при $kl \ll 1$ всегда будет иметь место второй случай переориентации.

Углы, при которых тангенциальная составляющая достигает максимума, находятся из уравнения $\cos\theta \sin(kl\cos\theta) - \sin^2\theta \cos(kl\cos\theta)\, kl = 0$.

При малых kl оно принимает вид $\cos 2\theta = 0$, т. е. максимум достигается при $\theta = \pi/4$.

Полученные результаты легко обобщаются на случай пузырьков различных радиусов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 408 с.
2. *Красильников В. А., Крылов В. В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
3. *Акуличев В. А.* Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях. М.: Наука, 1978. 280 с.
4. *Заболотская Е. А.* Взаимодействие газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 5. С. 618–623.
5. *Казанцев В. Ф.* Движение пузырьков в жидкости под действием сил Бьеркнеса, возникающих в акустическом поле // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129. № 1. С. 64–67.
6. *Алексеев В. Н.* К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 129–136.
7. *Завтрак С. Т.* К вопросу о силе взаимодействия Бьеркнеса двух газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 2. С. 240–245.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и их произведений. М.: Наука, 1971. 1108 С.
9. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
10. *Клей К., Медвин Г.* Акустическая океанография. М.: Мир, 1980. 580 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
12. *Завтрак С. Т.* К вопросу о поведении облака газовых пузырьков в жидкости в поле звуковой волны давления // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 31–36.

Научно-исследовательский институт
прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко
при Белгосуниверситете им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
26.V.1987