

где $\xi_1 = \varphi_1/\varphi$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$; величина φ_1 определяется трансцендентным уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\varphi_2(N-1)^2 - [N\varphi_2^2 + (N-1)^2] \operatorname{tg} \varphi_2}{\varphi_2[\varphi_2 N - (N-1) \operatorname{tg} \varphi_2]}$$

а величину φ_2 можно взять равной двум, тогда для используемых на практике значений N величина K будет близка к своему максимальному значению [5]. Величины K и χ выражаются через φ_1 и φ_2 :

$$K = \frac{N\varphi_2}{\varphi_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + (N-1) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}$$

$$\chi = \frac{1}{\varphi} \left\{ \varphi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 + \left[1 + \left(\frac{N-1}{\varphi_2} \right)^2 \cos^2 \varphi_1 - \frac{N-1}{\varphi_2} \sin 2\varphi_1 \right] \varphi_2 + \right.$$

$$+ \left[\cos 2\varphi_1 - \left(\frac{N-1}{\varphi_2} \right)^2 \cos^2 \varphi_1 + \frac{N-1}{\varphi_2} \sin 2\varphi_1 \right] \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 -$$

$$\left. - \left[\frac{N-1}{\varphi_2} \cos^2 \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \right] \sin^2 \varphi_2 \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Меркулов Л. Г. Теория ультразвуковых концентраторов // Акуст. журн. 1957. Т. 3. № 3. С. 230–238.
2. Eisner E. Complete solution of the «Webster» horn equation // Jour. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 41. № 4. Pt 2. P. 1128–1146.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1978.
4. Kleesattel C. Vibrator ampullaceus Eine Längenschwingungsform zur Erzeugung grösster Schallschnellen und Wandlerleistungen // Acustica, 1962. V. 12. № 5. P. 322–334.
5. Меркулов Л. Г., Харитонов А. В. Теория и расчет составных концентраторов // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 2. С. 183–190.
6. Гутин Л. Я. УК-теория магнестрикционного преобразователя // Избранные труды. Л.: Судостроение. 1977. С. 135–146.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
29.IX.1986

УДК 534.231

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ШОХА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЯ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Сумбатян М. А.

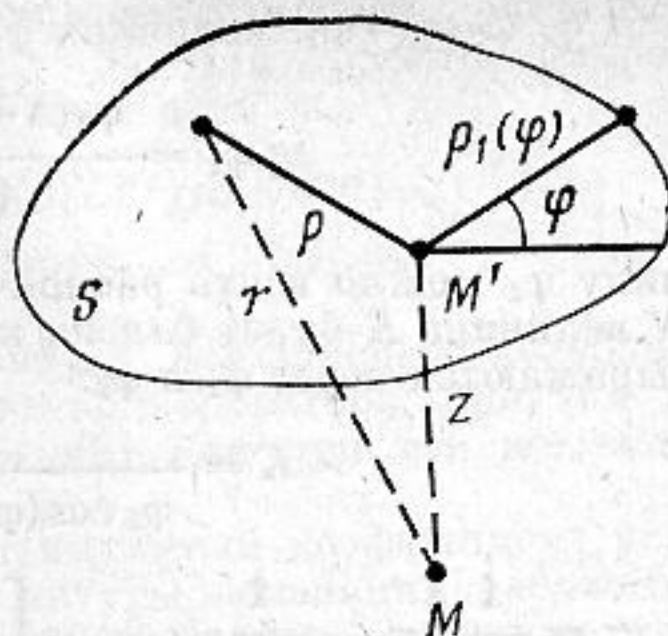
Исследованию ближнего поля плоского излучателя, расположенного на поверхности акустического полупространства, посвящено много работ [1–4]. Для поршневого излучателя произвольной формы в плане, закрепленного в жестком экране, Шох [5] сумел свести рассматриваемую проблему к вычислению однократного интеграла по конечному отрезку. Суть его метода состоит в следующем. Пусть амплитуда скорости гармонических колебаний поршня равна v_0 , тогда интеграл Рэлея для потенциала скорости (S – площадь излучателя)

$$\Phi(M) = \frac{v_0}{2\pi} \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} dS = \frac{v_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_1(\varphi)} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \rho d\rho \quad (1)$$

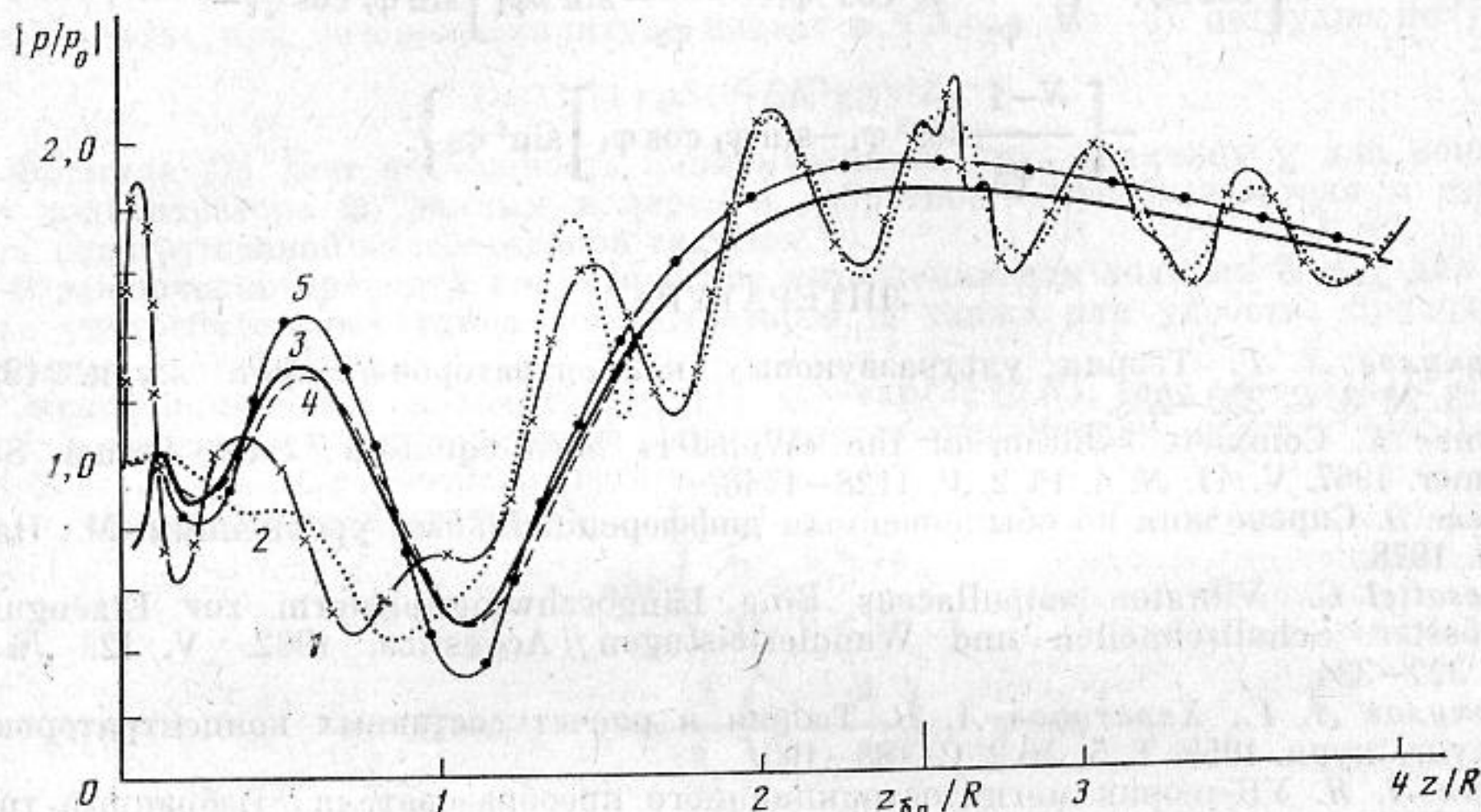
заменой переменных (см. фиг. 1) $r^2 = \rho^2 + z^2$, $dS = \rho d\rho d\varphi = r dr d\varphi$, $r dr = \rho d\rho$ сводится к виду ($r_1(\varphi) = (z^2 + \rho_1^2)^{1/2}$)

$$\Phi = \frac{v_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_z^{r_1(\varphi)} e^{ikr} dr = -\frac{v_0}{ik} \left[e^{ikz} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr_1(\varphi)} d\varphi \right]. \quad (2)$$

Фиг. 1. Схема расчета к методу Шоха



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь для определенности был рассмотрен случай, когда проекция M' точки M попадает в область S . Из формулы (2) легко получается известное выражение для давления на оси круглого излучателя радиуса R :

$$\Phi = -\frac{v_0}{ik} (e^{ikhz} - e^{ikh\sqrt{R^2+z^2}}). \quad (3)$$

Применим метод Шоха для случая, когда на поверхности излучателя S задано постоянное давление p_0 . Здесь интеграл Рэля может быть записан в виде

$$\begin{aligned} p(M) &= -\frac{p_0}{2\pi} \int_S \int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) dS = -\frac{p_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \int \frac{e^{ikr}}{r} dS = \\ &= \frac{p_0}{ik} \frac{\partial}{\partial z} \left[e^{ikhz} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr_1(\varphi)} d\varphi \right] = p_0 \left[e^{ikhz} - \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikh_1(\varphi)}}{r_1(\varphi)} d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

В частности, давление на оси круглого излучателя имеет вид

$$p = p_0 \left(e^{ikhz} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} e^{ikh\sqrt{R^2+z^2}} \right). \quad (5)$$

Проблема становится гораздо сложнее, если среду нельзя считать акустической. Так, решение для нормальной сосредоточенной силы Q , действующей на поверхность упругого полупространства, не выписывается в элементарном виде, а выражается в виде интеграла Фурье-Бесселя [6]. Например, напряжение

$$\sigma_z = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(2\alpha^2 - k_2^2)^2 e^{-\gamma_1 z} - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_2 z}}{(2\alpha^2 - k_2^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2} \alpha J_0(\alpha \rho) d\alpha \quad (6)$$

$\gamma_i = (\alpha^2 - k_i^2)^{1/2}$, $k_i = \omega/c_i$ ($i=1, 2$), c_1 и c_2 — скорости распространения продольной и поперечной волн. Однако для ультразвукового излучателя, для которого $k_i r \gg 1$ ($i=1, 2$)

езде, кроме малой окрестности самого излучателя, интегралы типа (6) могут быть достаточно точно приближены их асимптотическими выражениями. В самом деле, основной вклад в рассматриваемый интеграл вносит окрестность стационарной точки $\alpha = \rho/r$. Это позволяет оценить интеграл (6) следующим образом:

$$\sigma_z \sim -\frac{Qi}{2\pi} \frac{z}{r^2} \left[k_1 e^{ik_1 r} f_1\left(\frac{\rho}{r}\right) + k_2 e^{ik_2 r} f_2\left(\frac{\rho}{r}\right) \right], \quad \delta = \frac{1}{\beta}, \quad \beta = \frac{c_2}{c_1}, \quad (7)$$

$$f_1(\alpha) = \frac{(2\alpha^2 - \delta^2)^2}{(2\alpha^2 - \delta^2)^2 + 4\alpha^2 \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{\delta^2 - \alpha^2}}, \quad f_2 = \frac{4\alpha^2 \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2}}{(2\alpha^2 - 1)^2 + 4\alpha^2 \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

Если теперь излучатель представляет собой равномерно распределенную нагрузку p_0 , действующую по площади S , то представление (7) для сосредоточенной силы позволяет применить метод Шоха:

$$\sigma_z = -\frac{iz}{2\pi} p_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_z^{r_1(\varphi)} \left[k_1 e^{ik_1 r} f_1\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) + k_2 e^{ik_2 r} f_2\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) \right] \frac{dr}{r}. \quad (8)$$

В отличие от акустического случая внутренний интеграл в (8) точно не вычисляется. Однако для ультразвукового излучателя ($k_1 r \gg 1$) этот интеграл может быть эффективно вычислен стандартным приемом интегрирования по частям. Ограничиваясь главным членом, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{z}{2\pi} p_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r} \left[e^{ik_1 r} f_1\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) + e^{ik_2 r} f_2\left(\frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}\right) \right]_{r=z}^{r_1(\varphi)} = \\ &= p_0 \left\{ e^{ik_1 z} - \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[e^{ik_1 r_1} f_1\left(\frac{\sqrt{r_1^2 - z^2}}{r_1}\right) + e^{ik_2 r_1} f_2\left(\frac{\sqrt{r_1^2 - z^2}}{r_1}\right) \right] \frac{d\varphi}{r_1(\varphi)} \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

В частности, давление на оси круглого излучателя

$$\sigma_z = p_0 \left\{ e^{ik_1 z} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \left[e^{ik_1 \sqrt{z^2 + R^2}} f_1\left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) + e^{ik_2 \sqrt{z^2 + R^2}} f_2\left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Заметим, что в дальней зоне, как это следует из структуры функций f_1 и f_2 , формулы (9), (10) вырождаются в соответствующие формулы для акустического полупространства. Это объясняет частое использование акустических моделей среды для расчета дальнего поля излучателя.

Отметим также, что нормальный ультразвуковой излучатель, применяемый в дефектоскопии, работает на продольных волнах [3]. Продольная составляющая поля легко выделяется из формул (9), (10), если в них из двух функций f_1 и f_2 оставить только функцию f_1 , а функцию f_2 отбросить.

На фиг. 2 представлены графики распределения давления на оси круглого излучателя при $k_1 R / 2\pi = z_{\text{бл}} / R = 2,5$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$), рассчитанные по различным формулам. Из графиков видно, что формула (10) дает практически точные результаты при $z \geq 0,5 z_{\text{бл}}$, а продольная составляющая этой формулы почти везде совпадает с соответствующим точным значением. При этом давление продольной волны в упругой среде мало отличается от давления в акустической среде. Полное же давление осциллирует около акустического давления, что объясняется влиянием поперечных (а при малых z и рэлеевских) волн.

Точный результат для упругого полупространства был получен путем численного расчета интеграла Фурье-Бесселя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
2. Zemanek J. Beam behavior within the nearfield of a vibrating piston // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 49. № 1 (part 2). P. 181-191.
3. Ермолов И. Н. Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
4. Мартыненко С. В. Численное исследование ближней зоны поршневого излучателя // Дефектоскопия. 1985. № 10. С. 94-96.
5. Schoch A. Betrachtungen über das Schallfeld einer Kolbenmembran // Akust. Z. 1941. V. 6. S. 318-326.
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Поступило в редакцию
2.II.1987

Научно-исследовательский
институт механики и прикладной
математики Ростовского государственного
университета им. М. А. Суслова