Таким образом, показано, что макроскопические акустические течения, наблюдаемые в кавитационной области, подчиняются основным закономерностям для течений в поле бегущих волн. Измеренные значения скорости течения по порядку величины совпадают с расчетными. Коэффициент поглощения в кавитационной области намного превышает таковой в сплошной жидкости и не является постоянным. Он зависит от расстояния до источника звука, от амплитуды колебательного смещения преобразователя, т. е. от звукового давления в точке наблюдения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панов А. П.* Ультразвуковая очистка прецизионных деталей. М.: Машиностроение, 1984.
2. *Семенова Н. Г.* Экспериментальное исследование некоторых случаев акустических течений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: АКИН. 1969.
3. *Eckart G.* Vortices and Streaming caused by sound waves // Phys. Rev. 1948. V. 73. № 1. P. 68–80.
4. *Ивановский А. И.* Теоретическое и экспериментальное изучение потоков, вызванных звуком. М.: Гидрометеоиздат, 1959.
5. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А.* Модели газожидкостной смеси как нелинейной диспергирующей среды // Нелинейная акустика. Сб. статей. Горький.: ИПФ АН СССР, 1980. С. 143–160.
6. *Гурьев А. П., Семенова Н. Г.* Использование акустических течений для изучения поглощения ультразвуковых волн в жидкости с газовыми пузырьками // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 2. С. 296–297.
7. *Скучик Е.* Основы акустики. М.: Изд-во иностр. лит, 1958. С. 225.
8. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. С. 341–349.
9. *Семенова Н. Г.* Экспериментальное исследование образования, структуры и кинематики движения гидродинамического течения в звуковом поле // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 1. С. 112–116.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило в редакцию 22.VII.1986

УДК 534.26

СКАЛЯРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН РЭЛЕЯ НА СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Попов В. В.

В акустике существует ряд задач, требующих описания ПАВ на слабонеоднородной поверхности: отражение от периодической решетки поверхностных неоднородностей, ПАВ-линзы, волноводы и т. д. Граничные условия этих задач имеют вид

$$\left\{ \lambda\delta_{i2}\frac{\partial}{\partial x_n} + \mu\left(\delta_{in}\frac{\partial}{\partial y} + \delta_{2n}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right\} u_n \equiv \Gamma_{in}u_n = \varepsilon F_i, \tag{1}$$

где i, $n=1, 2, 3$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, Γ_{in} – граничный оператор (изотропное твердое тело занимает полупространство $y>0$ и граничит с вакуумом), λ, μ – коэффициенты Ламэ, $\varepsilon\ll 1$, $-\infty<x$, $z<\infty$, $F_i=F_i(x,\ z,\ u_k,\ \partial u_k/\partial x_p,\ \partial^2 u_k/\partial x_p\partial x_m)$ – некоторая вектор функция, линейная относительно упругих смещений u_k, их первых и вторых производных на поверхности и зависящая также от поверхностных координат x, z. Ниже выбрана зависимость от времени вида $\exp(-i\omega t)$. Точное решение уравнений теории упругости с указанными граничными условиями в общем случае невозможно, и основное приближение, которое делается в большинстве работ,– это пренебрежение излучением в объем [1, 2]. Следствием такого приближения, как показано в данной работе, является возможность преобразования векторных граничных условий (1) и уравнений динамики

$$\left\{ \delta_{in}(k_t^2+\Delta) + \frac{c_l^2-c_t^2}{c_t^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_n}\right\}u_n = 0 \tag{2}$$

к одному скалярному дифференциальному уравнению, записанному на поверхности $y=0$. В (2) обозначено: $k_{l,\,t}=\omega/c_{l,\,t}$, $c_{l,t}$ – скорости продольной и поперечной объемных волн, Δ – трехмерный лапласиан.

Разделим вектор упругих смещений на потенциальную u_k^l и вихревую u_k^t части: $u_k=u_k^l+u_k^t$ и введем скалярный потенциал $u_k^l=\partial\Phi/\partial x_k$. Используя тензор Грина изотропного упругого полупространства, найдем формальное решение задачи (1, 2):

$$\Phi = -\frac{\varepsilon}{(2\pi)^2\rho c_t^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'\,dz'\,dq_x\,dq_z}{R(q)}\,[2q_x\gamma_t F_x' + (k_t^2-2q^2)F_y' +$$
$$+2q_z\gamma_t F_z']e^{iq_x(x-x')+iq_z(z-z')+i\gamma_l y}, \tag{3}$$

где ρ – плотность твердого тела, $q^2=q_x^2+q_z^2$, $\gamma_{l,\,t}=(k_{l,t}^2-q^2)^{1/2}$, $\operatorname{Im}\gamma_{l,\,t}\geqslant 0$, $R(q)=$ $=(2q^2-k_t^2)^2+4q^2\gamma_l\gamma_t$ и штрихи у F_k' означают, что эта функция зависит от координат x', z'. Рэлеевский знаменатель R обращается в нуль при $q=\pm q_0$; вычетам в этих точках отвечает рэлеевская ПАВ. На слабонеоднородной поверхности волновое число ПАВ отличается от q_0 на величину порядка εq_0, положим поэтому в (3) $R=(q^2-q_0^2)\,dR/dq^2\equiv(q^2-q_0^2)B$, $B<0$, где производная взята в точке $q^2=q_0^2$. Осуществим в остальных сомножителях и слагаемых (3) замену $\gamma_{l,t}\to i\alpha_{l,t}\equiv i(q_0^2-k_{l,t}^2)^{1/2}$, $q^2\to q_0^2$, $iq_x\to\partial/\partial x$, $iq_z\to\partial/\partial z$, $y\to 0$. После указанного упрощения, которое отвечает пренебрежению рассеянием ПАВ в объем, имеем возможность перейти от интегрального уравнения (3) к дифференциальному на поверхности $y=0$:

$$(\Delta_\parallel+q_0^2)\,\Phi=\frac{\varepsilon}{\rho c_t^2 B}\left[2\alpha_t\frac{\partial F_x}{\partial x}+(k_t^2-2q_0^2)F_y+2\alpha_t\frac{\partial F_z}{\partial z}\right], \tag{4}$$

где $\Delta_\parallel=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$. Используя граничные условия (1), найдем, что в первом по ε порядке теории возмущений в правой части (4) следует положить (при $y=0$):

$$u_x^{\,l}=\partial\Phi/\partial x,\ \ u_y^{\,l}=-\alpha\Phi,\ \ u_z^{\,l}=\partial\Phi/\partial z,\ \ \overset{t}{u}_{x,z}=-(2q_0^2-k_t^2)\,\overset{l}{u}_{x,z}/2q_0^2,\ \ u_y^{\,t}=(2q_0^2-k_t^2)\,\Phi/2\alpha_t. \tag{5}$$

Производные по x и z типа $\partial u_x^{\,l}/\partial x=\partial^2\Phi/\partial x^2$ и т. д. вычисляются далее в (4) обычным образом, а производные $\partial u_k^{l,t}/\partial y$ следует заменить на произведения $\alpha_{l,t}u_k^{l,t}$. Возникающие комбинации $\Delta_\parallel$ следует заменить на q_0^2. Уравнение (4) вместе с соотношениями (5) образуют замкнутую систему уравнений, содержащую в себе и граничные условия (необходимые, если характер неоднородности поверхности меняется скачкообразно), поскольку (4), (5) записаны на всей плоскости $-\infty<x$, $z<\infty$.

Для двумерной первоначальной задачи (1), (2) (зависимость от z отсутствует) достаточно в (4), (5) отбросить слагаемые с производными по z; кроме того, в правой части (4) следует $\partial^{2n}/\partial x^{2n}$ заменить на $(-1)^n q_0^{2n}$ ($n=1$, 2), а $\partial^{2n+1}/\partial x^{2n+1}$ заменить на $(-1)^n q_0^{2n}\partial/\partial x$.

В качестве примеров применения уравнения (4) рассмотрим полосковый и топографический поверхностные волноводы [3]. Волноводы имеют неограниченную протяженность вдоль оси x, и зависимость Φ от x выбрана в виде $\exp(ipx)$. Их ширина в z-направлении равна $2d$; при $|z|>d$, т. е. вне волновода, потенциал $\Phi\sim\exp(-\xi|z-d|)$, где $\xi=(p^2-q_0^2)^{1/2}>0$. Пусть поверхностная плотность массы в полосковом волноводе равна M (г/см^2). Введем обозначения:

$$\varepsilon=\frac{M\alpha_t k_t^4}{\rho|B|q_0^2},\qquad q_1^2=q_0^2\left(1+\varepsilon\frac{\alpha_l+\alpha_t}{\alpha_t}\right),\qquad \varkappa=\sqrt{q_1^2-p^2}.$$

Дисперсионное уравнение для симметричных волноводных мод имеет вид $\operatorname{tg}\varkappa d=\xi/\varkappa(1-\varepsilon)$ и отличается от приведенного в работе [3] множителем $1-\varepsilon$. Для антисимметричных мод получаем $\operatorname{tg}\varkappa d=-\varkappa(1-\varepsilon)/\xi$.

В случае топографического волновода произвольной формы из (4), (5) находим при $-\infty<z<\infty$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\xi^2\right)\Phi=A\frac{d}{dz}(\Phi n_z)-D\Phi\frac{dn_z}{dz},$$

где $$A=\frac{\alpha_t}{|B|q_0^2}\left[8q_0^2(k_t^2-k_l^2)-k_t^4\right]>0,\qquad D=\frac{\alpha_t}{|B|q_0^2}\left[q_0^2(10k_t^2-12k_l^2)-k_t^4\right]>0,$$

n_z – проекция вектора внутренней нормали на ось z, $|n_z|\ll 1$, и высота (глубина) волновода мала в сравнении с q_0^{-1}. Будем считать вначале, что волновод в сечении является равнобедренным треугольником и представляет собой канавку глубиной h, либо выступ этой же высоты, причем $|h|/d=n\ll 1$, $q_0|h|\ll 1$. Закон дисперсии волноводной моды (она симметричная) в этом случае есть

$$\xi Q\operatorname{cth}Qd=n^2D(D-A)-\xi^2\pm\xi n(D-A/2), \tag{6}$$

где $Q=(\xi^2+n^2A^2/4)^{1/2}>0$; верхний знак в формуле (6) отвечает волноводу – канавке, нижний – волноводу – выступу. Рассмотрим также волноводные свойства скошенной ступеньки. Пусть при $z>2d$ поверхность твердого тела описывается уравнением $y=h$, а при $z<0$ уравнением $y=0$. В области $0<z<2d$ уравнение поверхности есть $y=hz/2d$. Закон дисперсии в таком волноводе имеет вид $8\xi Q\operatorname{cth}Qd=n^2D(D-A)-8\xi^2$, и не зависит от знака h.

Уравнение, подобное (4), нетрудно получить также для сдвиговых ПАВ Гуляева – Блюстейна и Лява. Подчеркнем, что условием применимости уравнений типа (4) является малое изменение глубины проникновения парциальных составляющих ПАВ по отношению к свободной плоской поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tuan H. S., Parekh J. P.* Theory for SAW Grating Cascades // IEEE Trans. SU-24. 1977. № 6. P. 384–392.
2. *Гуляев Ю. В., Григорьевский В. И., Плесский В. П.* Брэгговское отражение волны Рэлея от периодически неровного участка поверхности упругого тела // ЖТФ. 1981. Т. 51. № 7. С. 1338–1344.
3. Поверхностные акустические волны / Под ред. Олинера А. М.: Мир, 1981. 390 с.

Институт математики
Академии наук Кирг.ССР

Поступило в редакцию
4.XII.1986