АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 4

УДК 534.26

# ИЗОЛЯЦИЯ ВОЛН В ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ ПОМОЩИ РЕЗОНАТОРОВ

*Лапин Л. Д.*

Исследовано распространение мод в оболочке с резонаторами.

В работах [1, 2] было показано, что продольные и изгибные волны в тонкой пластине можно изолировать при помощи системы резонаторов. Представляет интерес рассмотреть соответственную задачу об изоляции волн в тонкой цилиндрической оболочке. Ниже она решена для осесимметричных волн в этой оболочке.

Пусть оболочка совпадает с координатной цилиндрической поверхностью $r=R$ и пусть при $z=0$ к ней присоединена тонкая кольцевая пластина, работающая на изгиб как пружина, причем на конце пластины равномерно укреплены грузы. Эта пластина с грузами является осесимметричным резонатором, коэффициент упругости и массу его обозначим через $\varkappa$ и $m$ соответственно. На резонатор падает первая (не имеющая критической частоты) осесимметричная мода со смещениями [3, 4]:

$$u^{(0)}(z, t)=\exp[i(\xi_1 z-\omega t)],\quad w^{(0)}(z, t)=\alpha\exp[i(\xi_1 z-\omega t)], \qquad (1)$$

где $u^{(0)}$ и $w^{(0)}$ — соответственно тангенциальное и нормальное смещения оболочки, $\xi_1$ — положительный корень дисперсионного уравнения $\Delta(\xi)=0$. Величины $\alpha$ и $\Delta(\xi)$ определяются по формулам:

$$\alpha=-i\xi_1\frac{\nu}{R}\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{h^2}{12}\xi_1^4-\frac{1}{R^2}\right)^{-1},$$

$$\Delta(\xi)=\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\xi^2\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{h^2}{12}\xi^4-\frac{1}{R^2}\right)-\frac{\nu^2}{R^2}\xi^2,$$

где $c=[E/\rho(1-\nu^2))]^{1/2}$, $h$ — толщина оболочки, $\nu$, $E$ и $\rho$ — соответственно коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность среды. Под действием волны (1) резонатор возбуждается и излучает поле $\{u^{(1)}, w^{(1)}\}$. Полное поле в оболочке будет $u=u^{(0)}+u^{(1)}$, $w=w^{(0)}+w^{(1)}$.

Обозначим через $u'(t)$ — смещение груза резонатора. Уравнение движения этого груза имеет вид

$$m\frac{d^2u'}{dt^2}=-F(t), \qquad (2)$$

где сила $F(t)\equiv F_0\exp(-i\omega t)$ определяется по формуле

$$F(t)=\varkappa[u'(t)-u(0, t)]. \qquad (3)$$

Уравнения движения оболочки, соединенной с осесимметричным резонатором, можно написать в следующем виде [5]:

$$\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{\nu}{R}\frac{dw}{dz}+\frac{\omega^2}{c^2}u=-\frac{F}{Q}\delta(z),$$
$$\frac{\nu}{R}\frac{du}{dz}-\frac{h^2}{12}\frac{d^4w}{dz^4}-\frac{w}{R^2}+\frac{w^2}{c^2}w=0, \qquad (4)$$

где $Q=2\pi RhE/(1-\nu^2)$, $\delta(z)$ — дельта-функция. Поскольку падающая мода (1) является свободной волной, то в левой части уравнений (4) можно заменить $u$ и $w$ соответственно на $u^{(1)}$ и $w^{(1)}$. На основе этих уравнений можно полагать, что рассеянное поле в оболочке создается танген-

циальной силой $F(t)$, приложенной к ней при $z=0$. Пользуясь методом Фурье [4], получим следующие выражения для $u^{(1)}$ и $w^{(1)}$:

$$u^{(1)}(z,t)=-i\frac{F_0}{Q}\sum_{n=1}^{3}\frac{\beta_n}{\Delta_n'}\exp[i(\pm\xi_n z-\omega t)], \tag{5}$$

$$w^{(1)}(z,t)=\mp\frac{F_0}{Q}\frac{\nu}{R}\sum_{n=1}^{3}\frac{\xi_n}{\Delta_n'}\exp[i(\pm\xi_n z-\omega t)], \tag{6}$$

где

$$\Delta_n'\equiv\left(\frac{d\Delta}{d\xi}\right)_{\xi_n}=\xi_n\left\{\frac{1}{2}h^2\xi_n^2\left(\xi_n^2-\frac{2}{3}\frac{\omega^2}{c^2}\right)-2\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{(1-\nu^2)}{R^2}\right)\right\},$$

$$\beta_n=\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{h^2}{12}\xi_n^4-\frac{1}{R^2}\right),$$

$\xi_n$ — волновое число $n$-й осесимметричной моды, верхний и нижний знаки выбираются соответственно при $z>0$ и при $z<0$.

Корни дисперсионного уравнения $\Delta(\xi)=0$ были исследованы в работах [3, 4]. Величина $\xi_1$ всегда вещественная, при $\omega\ll c/R$ она равна приближенно $\omega\sqrt{\rho/E}$. Величина $\xi_2$ комплексная при $\omega<c/R$ и вещественная при $\omega>c/R$. Величина $\xi_3$ всегда комплексная, при $\omega<c/R$ выполняется соотношение $\xi_3=-\xi_2^*$. Таким образом, оболочка одномодовая при $\omega<c/R$ и двухмодовая при $\omega>c/R$.

Смещение груза резонатора получим из уравнения (2). Оно будет

$$u'(t)=\frac{F_0}{m\omega^2}\exp(-i\omega t). \tag{7}$$

Амплитуду $F_0$ подберем таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение (3). Подставляя формулы (1), (5) и (7) в это соотношение, получим искомую амплитуду силы

$$F_0=\frac{i\omega}{\left\{Y_1+i\left(Y_2+\frac{1}{\omega m}-\frac{\omega}{\varkappa}\right)\right\}}, \tag{8}$$

где $Y_1$ и $Y_2$ — соответственно вещественная и мнимая части величины $Y$, определяемой по формуле

$$Y=\frac{\{-i\omega u^{(1)}(0,t)\}}{\{F_0\exp(-i\omega t)\}}=-\frac{\omega}{Q}\sum_{n=1}^{3}\frac{\beta_n}{\Delta_n'}.$$

Рассеянное поле $\{u^{(1)}, w^{(1)}\}$ получим по формулам (5) и (6) при подстановке $F_0$ в них. Амплитуда тангенциального смещения в первой моде этого поля равна $A_1=-i(F_0\beta_1)/(Q\Delta_1')$. Амплитуда тангенциального смещения в прошедшей волне будет $(1+A_1)$.

Интенсивное рассеяние падающей волны от резонатора происходит при частотах, близких $\omega^0$, где $\omega^0$ — решение уравнения

$$Y_2+\frac{1}{\omega m}-\frac{\omega}{\varkappa}=0.$$

При $\omega=\omega^0$ из формулы (8) получим выражение $F_0=i\omega^0/Y_1$ и амплитуда $A_1$ будет равна

$$A_1=\omega^0\beta_1/Y_1Q\Delta_1'. \tag{9}$$

Исследуем закономерности рассеяния волн в одномодовой ($\omega<c/R$) и в двухмодовой ($\omega>c/R$) оболочках. Для одномодовой оболочки величина $Y_1$ равна $-\omega\beta_1/Q\Delta_1'$ и из формулы (9) получим соотношение $A_1=-1$. Следовательно, падающая волна полностью отражается от резонатора. Амплитуда прошедшей волны, равная $1+A_1$, обращается в нуль.

Для двухмодовой оболочки величина $Y_1$ определяется по формуле

$$Y_1 = -\frac{\omega}{Q}\left(\frac{\beta_1}{\Delta_1'} + \frac{\beta_2}{\Delta_2'}\right).$$

Амплитуда прошедшей волны будет равна $\tau/(1+\tau)$, где $\tau=\beta_2\Delta_1'/\beta_1\Delta_2'$. При $\omega>c/R$ в рассеянном поле, помимо первой моды, возникает вторая мода и резонатор перестает быть эффективным отражателем (изолятором) волн.

Исследуем распространение осесимметричных волн в тонкой цилиндрической оболочке с волноводным изолятором. Такой резонатор осуществляется в виде цепочки близко расположенных друг от друга осесимметричных резонаторов (кольцевых пластин с грузами), поверхностные коэффициент упругости и массу резонаторов обозначим через $\varkappa'$ и $\sigma'$ соответственно. Уравнения движения оболочки с «размазанными» резонаторами получим способом, аналогичным использованному в работах [1, 2]. Они имеют вид

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{\nu}{R}\frac{dw}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}\left\{1 - \frac{\sigma'/\sigma}{(\omega^2/\omega_0{}^2-1)}\right\}u = 0,$$

$$\frac{\nu}{R}\frac{du}{dz} - \frac{h^2}{12}\frac{d^4w}{dz^4} - \frac{w}{R^2} + \frac{\omega^2}{c^2}w = 0.$$

где $\omega_0=\sqrt{\varkappa'/\sigma'}$ – собственная частота резонаторов, $\sigma=\rho h$ – поверхностная плотность оболочки. Решение ищем в виде $u(z)=A\exp(i\xi z)$, $w(z)=B\exp(i\xi z)$. Приравнивая определитель системы алгебраических уравнений нулю, получим дисперсионное уравнение для $\xi$:

$$\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\sigma'/\sigma}{(\omega^2/\omega_0{}^2-1)}\right] - \xi^2\right\}\left\{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{h^2}{12}\xi^4 - \frac{1}{R^2}\right\} - \frac{\nu^2}{R^2}\xi^2 = 0.$$

В оболочке с резонаторами первая мода нераспространяющаяся (затухающая) в диапазоне частот от $\omega_0$ до $\omega_0\sqrt{1+\sigma'/\sigma}$. Коэффициент затухания этой моды равен $\operatorname{Im}\xi_1$. При прохождении участка длиной $l$ амплитуда моды уменьшается в $\exp(\operatorname{Im}\xi_1 l)$ раз. При $\omega\ll c/R$ волновое число $\xi_1$ равно приближенно

$$i\omega\sqrt{\rho/E}\left[\frac{\sigma'/\sigma}{(\omega^2/\omega_0{}^2-1)} - 1\right]^{1/2}.$$

Критическая частота второй моды равна $c/R$.

Исследуем распространение осесимметричных волн в тонкой цилиндрической оболочке с «размазанными» резонансными элементами, реагирующими на продольные и изгибные волны. Таким резонансным элементом является резиновый столбик с грузом. Обозначим поверхностные коэффициенты упругости резонаторов для продольных и изгибных волн через $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$ соответственно. Выполняя соответственные вычисления, получим следующее дисперсионное уравнение для $\xi$:

$$\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\sigma'/\sigma}{(\omega^2/\omega_{01}{}^2-1)}\right] - \xi^2\right\}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\sigma'/\sigma}{(\omega^2/\omega_{02}{}^2-1)}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{h^2}{12}\xi^4 - \frac{1}{R^2}\right\} - \frac{\nu^2}{R^2}\xi^2 = 0,$$

где $\omega_{01}=\sqrt{\varkappa_1'/\sigma'}$ и $\omega_{02}=\sqrt{\varkappa_2'/\sigma'}$ – собственные частоты резонаторов для продольных и изгибных волн, $\sigma'$ – поверхностная масса грузов.

Полагая $\xi=0$ в этом дисперсионном уравнении, получим критические частоты нормальных мод и, следовательно, определим полосы запирания оболочки. Первая мода нераспространяющаяся в диапазоне частот от $\omega_{01}$ до $\omega_{01}\sqrt{1+\sigma'/\sigma}$.

Выберем собственную частоту резонаторов для изгибных волн равной критической частоте второй моды в оболочке без резонаторов ($\omega_{02}=c/R$). Тогда вторая мода будет нераспространяющейся в диапазонах $0<\omega<\omega'$

и $\omega_{02}<\omega<\omega''$, где

$$\omega'=\omega_{02}\left\{\left(1+\frac{\sigma'}{2\sigma}\right)-\sqrt{\left(1+\frac{\sigma'}{2\sigma}\right)^2-1}\right\}^{1/2}<\omega_{02},$$

$$\omega''=\omega_{02}\left\{\left(1+\frac{\sigma'}{2\sigma}\right)+\sqrt{\left(1+\frac{\sigma'}{2\sigma}\right)^2-1}\right\}^{1/2}>\omega_{02}.$$

Располагая волноводный изолятор на расстоянии нескольких радиусов $R$ от источника шума, получим изоляцию второй моды в полосе $0<\omega<\omega''$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Исакович М. А., Кашина В. И., Тютекин В. В.* Применение систем резонаторов для звукоизоляции нормальной волны нулевого порядка в трубах и в других длинных линиях // Научн.-техн. сб. Морское приборостроение. Сер. Акустика. 1972. Вып. 1. С. 117–125.
2. *Исакович М. А., Кашина В. И., Тютекин В. В.* Способ виброизоляции продольных и изгибных волн в стержнях и пластинках: А. с. № 440509 М. кл. *F16f15/00* // Опубл. Б. И. 1974. № 31. С. 92.
3. *Михайлов Р. Н.* К вопросу о распространении и затухании нормальных волн в замкнутой цилиндрической оболочке // Вибрации и шумы (физические исследования). М.: Наука, 1969. С. 35–43.
4. *Тартаковский Б. Д., Михайлов Р. Н.* Колебания бесконечной тонкостенной оболочки под действием сосредоточенных сил // Колебания, излучение и демпфирование упругих структур. М.: Наука, 1973.
5. *Тимошенко С. П.* Пластины и оболочки. М.– Л.: ГИТТЛ, 1948.



Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР



Поступила в редакцию
8.X.1986