АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 3

УДК 681.883

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ, СОЗДАВАЕМЫХ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЗВУКА В ТРЕХМЕРНОНЕОДНОРОДНОМ ОКЕАНЕ

Мальцев Н. Е., Некрасов А. Н.

В работе изложен алгоритм расчета лучевых траекторий, времен и интенсивностей в трехмернонеоднородной среде. Приведены примеры расчетов для некоторых задач, в которых трехмерная неоднородность среды является существенной.

При анализе структуры звуковых полей в сложных условиях распространения подводного звука в прибрежной зоне в присутствии вихрей или внутренних волн в качестве основного аппарата применяется аппарат лучевой теории [1, 2]. Последнее связано с простотой постановки и решения задачи (задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений) и с простотой анализа полученных результатов, так как в итоге получаются физические ясные параметры — углы, времена и интенсивности приходов сигналов. Авторы настоящей работы поставили себе цель в рамках лучевого подхода получить картину поля в целом, чтобы оценить характер влияния тех или иных неоднородностей на звуковое поле. Поэтому был разработан эффективный алгоритм вычисления лучевых траекторий и построения ортогональных им волновых фронтов, по существу построение лучевой системы координат для данной задачи. Первая часть работы посвящена описанию алгоритма, а вторая содержит примеры расчетов для конкретных условий распространения звука.

Основная идея лучевого алгоритма в трехмернонеоднородной среде изложена в работе [3] и состоит в способе аппроксимации свойств среды путем разбиения ее на симплексы, в каждом из которых вводится естественная система координат, в которых и интегрируются лучевые уравнения. Более подробно указанная выше процедура реализуется следующим образом.

Рассмотрим акваторию, в которой необходимо производить вычисления звукового поля. Она характеризуется областью в плоскости (x, y), которая в свою очередь описывается множеством точек (x_i, y_i), $1 \leqslant i \leqslant M$, $M \geqslant 3$, в которых имеются вертикальные измерения зависимости скорости звука от глубины (c_{ij}, z_j), $1 \leqslant j \leqslant N_i$, $N_i > 1$. На первом этапе производится триангуляция множества точек (x_i, y_i), т. е. разбиение на непересекающиеся треугольники с вершинами в точках (x_i, y_i). Каждый получившийся треугольник является, очевидно, основанием вертикальной трехгранной призмы, ограниченной снизу дном океана, которое задано множеством точек (x_i, y_i, z_{N_i}). В пределах одной такой призмы дно океана предполагается плоским. На следующем шаге происходит разбиение призмы на симплексы, т. е. непересекающиеся тетраэдры, вершинами которых служат точки (x_i, y_i, z_j), в которых измерена скорость звука. В итоге получаем разбиение всей акватории на непересекающиеся тетраэдры и задача построения лучевых траекторий сводится к задаче их построения в одном тетраэдре и в переходе от тетраэдра к тетраэдру. Внутри каждого тетраэдра вводим барицентрическую систему координат $(x, y, z) \leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ по формулам [см. 3]

$$A\lambda \equiv \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

и представляем квадрат коэффициента преломления внутри симплекса в виде

$$n^2(x, y, z) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{c_k^2} \lambda_k(x, y, z), \tag{2}$$

где c_k — скорости, заданные в вершинах симплекса. В силу свойства барицентрических координат

$$\lambda_i(x_k, y_k, z_k) = \delta_{ik} \tag{3}$$

и в силу линейности формулы (2) такая аппроксимация квадрата коэффициента преломления обеспечивает заданные значения в вершинах симплексов и непрерывность аппроксимации при переходе от симплекса к симплексу. Поскольку $n^2(x, y, z)$ линейно внутри симплекса, то $\nabla n^2 = \text{const}$ и получаем кусочно-слоистую среду, т. е. все соотношения для лучей, которые имеют место в слоистой среде, сохраняются в пределах каждого симплекса. В частности, лучевые уравнения [4] с помощью замены длины дуги s на

$$u = \int^{s} \frac{d_s}{n} \tag{4}$$

сводятся к виду

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2} - \frac{1}{2} \nabla n^2 = 0 \tag{5}$$

и в силу постоянства градиента квадрата коэффициента преломления легко интегрируются. Переходя от декартовых координат к барицентрическим, получаем

$$\boldsymbol{\lambda}(u) = A^{-1} \frac{u^2}{4} \nabla n^2 + u \frac{d\boldsymbol{\lambda}(0)}{du} + \boldsymbol{\lambda}(0), \tag{6}$$

где матрица A определена в (1), и

$$\boldsymbol{\lambda}(0) = A^{-1}\mathbf{r}(0), \quad \frac{d\boldsymbol{\lambda}(0)}{du} = A^{-1} \frac{d\mathbf{r}(0)}{du}, \tag{7}$$

т. е. получаем форму лучевой траектории внутри симплекса в декартовых и барицентрических координатах.

В силу свойства (3) барицентрические координаты чрезвычайно упрощают процедуру анализа выхода луча из симплекса. Последняя сводится к поиску наименьшего положительного корня среди четырех квадратных уравнений:

$$\boldsymbol{\lambda}(u) = 0, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\lambda}(u)$ определено в (6). Соответствующая точка лежит на грани общей исходному и одному из четырех соседних симплексов и дает при переходе к декартовым координатам в старом симплексе и к барицентрическим в новом симплексе новые значения $\mathbf{r}(0)$, $\boldsymbol{\lambda}(0)$, $\frac{d\mathbf{r}(0)}{du}$ $\frac{d\boldsymbol{\lambda}(0)}{du}$, и луч в новом симплексе описывается формулами (5), (6) с новым значением ∇n^2. Для вычисления времени вдоль луча используется соотношение

$$t = \int^{s} \frac{ds}{c} = \int^{u} \frac{du}{c^2} = \int \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right|^2 du, \tag{9}$$

откуда

$$t = \left| \frac{d\mathbf{r}(0)}{du} \right|^2 u + \left(\frac{d\mathbf{r}}{du}, \nabla n^2 \right) \frac{u^2}{2} + |\nabla n^2|^2 \frac{u^3}{12}. \tag{10}$$

Вычисление интенсивности вдоль луча производится по методике, предложенной в [4, 5]. Последняя состоит в линеаризации лучевых уравнений в окрестности луча, вдоль которого предполагается расчет интенсивности,

в специальной системе координат (s, q_1, q_2), соответствующей параллельному переносу в метрике, определяемой функционалом Ферма. Линеаризованная система лучевых уравнений имеет вид

$$\frac{d\hat{Q}}{ds}=c(s)\hat{P}, \qquad \frac{d\hat{P}}{ds}=-c^2(s)\hat{\Phi}\hat{Q}, \tag{11}$$

где $c(s)$ — скорость звука на опорном луче как функция длины дуги, $\hat{Q}$ — матрица 2×2, состоящая из отклонений q_i линеаризованного луча от опорного луча, $\hat{P}$ — матрица обобщенных импульсов, канонически сопряженных координатах q_i, причем Φ — матрица вторых производных скорости звука по координатам q_1, q_2 на опорном луче.

Лучи, образующие лучевую трубку в окрестности опорного луча $\mathbf{r}(s)$, описываются функциями $q_i=q_i(s, \theta, \varphi)$, $p_i=p_i(s, \theta, \varphi)$, где θ и φ — углы выхода из источника в вертикальном и азимутальном направлениях соответственно.

Пусть

$$Q_{ij}(s)=\left.\frac{\partial q_i}{\partial \gamma_i}\right|_{\gamma_i=\gamma_i^{(0)}}, \; P_{ij}(s)=\left.\frac{\partial P_i}{\partial \gamma_j}\right|_{\gamma_i=\gamma_i^{(0)}}, \tag{12}$$

где $\gamma_1=\theta$, $\gamma_2=\varphi$, $\gamma_1^{(0)}=\theta_0$, $\gamma_2^{(0)}=\varphi_0$, т. е. значениям на опорном луче. Очевидно, матрицы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$, введенные в (12), удовлетворяют системе (11) и согласно [5] геометрическая расходимость на опорном луче находится из соотношения

$$I=\det \hat{Q}. \tag{13}$$

Начальные данные для системы (11) задаются в виде

$$\hat{Q}(0)=0, \hat{P}(0)=\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{\sin\theta_0}{c(0)} \\ -\dfrac{1}{c(0)} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Система (11) в среде с линейным квадратом коэффициента преломления интегрируется в явном виде, причем фундаментальная матрица системы имеет вид

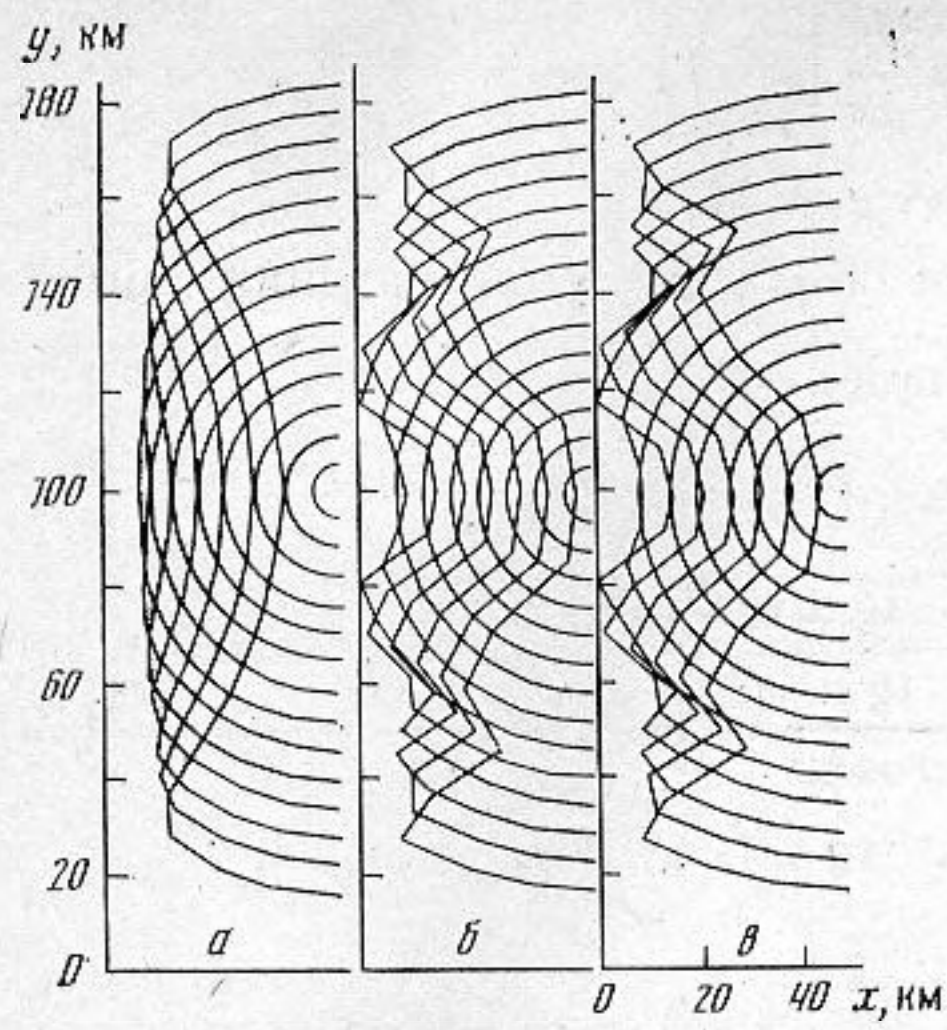
$$W(u)=\begin{Vmatrix} q_{11} & 0 & q_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ p_{11} & 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

где u определено в (4) и

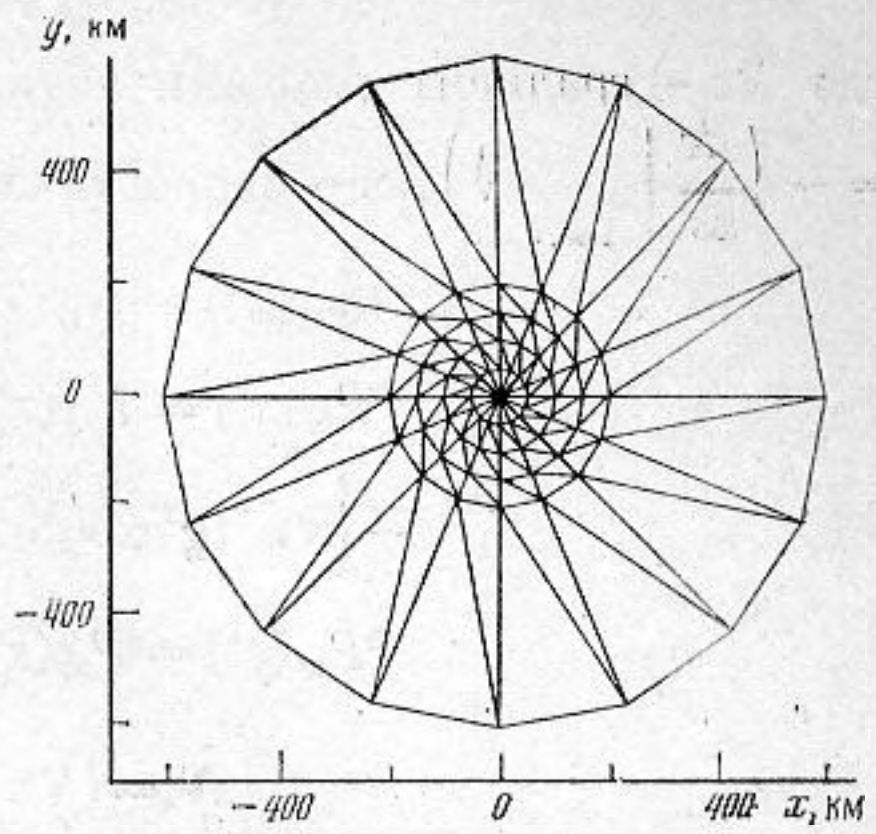
$$\begin{gathered} q_{11}=(1-v\sin\theta-v^2\cos^2\theta)/A, \\ q_{12}=2c_0v(1-v\sin\theta)/(\alpha A), \\ p_{11}=\alpha v(-3\cos^2\theta+3v\cos^2\theta\sin\theta-v^2\cos^2\theta)/(2c_0A^3), \\ p_{12}=(1-3v\sin\theta+3v^2\sin^2\theta-v^3\sin\theta)/A^3, \end{gathered} \tag{16}$$

где c_0 — скорость звука в точке $u=0$ (т. е. при входе луча в симплексе),

$$\begin{gathered} \alpha=|\nabla n^2|c_0^2, \qquad v=\frac{\alpha u_{\min}}{2c_0}, \\ \sin\theta=-\frac{c_0\left(\nabla n^2, \dfrac{d\mathbf{r}^{(0)}}{du}\right)}{|\nabla n^2|}, \\ A=(1-2v\sin\theta+v^2)^{1/2}. \end{gathered} \tag{17}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Картина фронтов в прибрежном клине (вид сверху) для семейства 17 лучей с одинаковым вертикальным углом выхода φ: *а* — $\varphi=0{,}2$ рад, профиль дна показан в табл. 2, $n^2(z)=4/9+0{,}005z$; *б* — $\varphi=-0{,}2$ рад, профиль дна показан в табл. 3, $c(z)$ задана в табл. 1; *в* — $\varphi=0{,}2$ рад, профиль дна показан в табл. 3, $c(z)$ задана в табл. 1

Фиг. 2. Триангуляция области, занятой океаническим рингом

Поскольку в симплексе среда слоистая, то орты специальной системы координат, упомянутой выше, совпадают с касательной, нормалью и бинормалью к опорному лучу.

Поскольку аппроксимация среды является кусочно-непрерывной, то грани между симплексами представляют из себя слабые границы (границы с разрывом первой производной коэффициента преломления) и необходимо учитывать прохождение решений линеаризованной системы лучевых уравнений через слабую границу (отражением от слабой границы пренебрегаем). Приведем здесь формулы для преобразования матриц $\hat{Q}$ и $\hat{P}$ при отражении от дна или поверхности и прохождения через слабую границу. Пусть при $s=s^*$ луч испытывает отражение или прохожде-

Таблица 1

$-z$, м	c, м/с	$-z$, м	c, м/с	$-z$, м	c, м/с	$-z$, м	c, м/с
0	1488,6	50	1457,1	150	1457,8	500	1471,0
10	1477,3	60	1454,9	200	1464,7	1000	1481,9
20	1465,9	75	1452,3	250	1467,3	2000	1493,5
30	1460,3	90	1451,9	300	1468,3	3000	1509,9
40	1458,6	100	1452,1	400	1469,9	3300	1514,9

ние через слабую границу. Введем на падающем луче векторы ${}^0\mathbf{e}_i(s)$ так, чтобы ${}^0\mathbf{e}_1(s^*)$ лежал в плоскости $(\mathbf{v},\ d\mathbf{r}/ds|_{s=s^*})$, где $\mathbf{v}$ — нормаль к границе, а вектор ${}^0\mathbf{e}_2(s)$ дополнял систему $d\mathbf{r}/ds$, ${}^0\mathbf{e}_1(s)$, ${}^0\mathbf{e}_2(s)$ до правой тройки. Векторы ${}^0\mathbf{e}_i(s)$ могут быть получены из векторов $\mathbf{e}_i(s)$, $i=1, 2$, путем линейного преобразования. Обозначим через ${}^0Q_{ij}$ и ${}^0P_{ij}$, $i, j=1, 2$, функции, получаемые из Q_{ij} и P_{ij} $i, j=1, 2$, путем того же преобразования. Пусть функции ${}^mQ$ и ${}^mP$ описывают при $m=1$ отраженный луч, а при $m=2$ — прошедший через слабую границу. Тогда имеем:

$$
\begin{gathered}
{}^1Q_{1j}(s^*)=-{}^0Q_{1j}(s^*),\quad {}^1Q_{2j}(s^*)={}^0Q_{2j}(s^*),\\
{}^1P_{1j}(s^*)=-{}^0P_{1j}(s^*)+c_*^{-2}[\operatorname{tg}^2\alpha M_s+2\operatorname{tg}\alpha M_q]\,{}^0Q_{1j}(s^*),\\
{}^1P_{2j}(s^*)={}^0P_{2j}(s^*),
\end{gathered}
\tag{18}
$$

$$M_s = \left(\nabla c,\ 2\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\frac{d\mathbf{r}}{ds}\Big|_{s=s^*}\right)\right),$$

$$M_q = (\nabla c,\ 2\mathbf{v}(\mathbf{v}^1\mathbf{e}_1(s^*)),$$

где ∇c — градиент скорости звука при $s=s^*$, α — угол падения, $\sin\alpha = -\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\Big|_{s=s^*}\cdot\mathbf{v}\right)$, c_* — скорость звука при $s=s^*$.

$$\begin{gathered}
{}^2Q_{1j}(s^*) = {}^0Q_{1j}(s^*), \quad {}^2Q_{2j}(s^*) = {}^0Q_{2j}(s^*),\\
{}^2P_{1j}(s^*) = {}^0P_{1j}(s^*) - c_*^{-1}\operatorname{tg}\alpha N_2\,{}^0Q_{2j}(s^*) -\\
-\left[c_*^{-2}\operatorname{tg}^2\alpha N_s + 2c_*^{-1}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}N_1\right]{}^0Q_{1j}(s^*),\\
{}^2P_{2j}(s^*) = {}^0P_{2j}(s^*) - c_*^{-1}\operatorname{tg}\alpha N_2\,{}^0Q_{1j}(s^*),
\end{gathered} \tag{19}$$

$$N_s = (\nabla c - \nabla v)\frac{d\mathbf{r}}{ds}\Big|_{s=s^*},$$

$$N_1 = c_*^{-1}\cos\alpha(\nabla c - \nabla v)\,{}^0\mathbf{e}_1(s^*),$$

$$N_2 = c_*^{-1}(\nabla c - \nabla v)\,{}^0\mathbf{e}_2(s^*).$$

Здесь ∇v — градиент скорости звука при $s=s^*+0$.

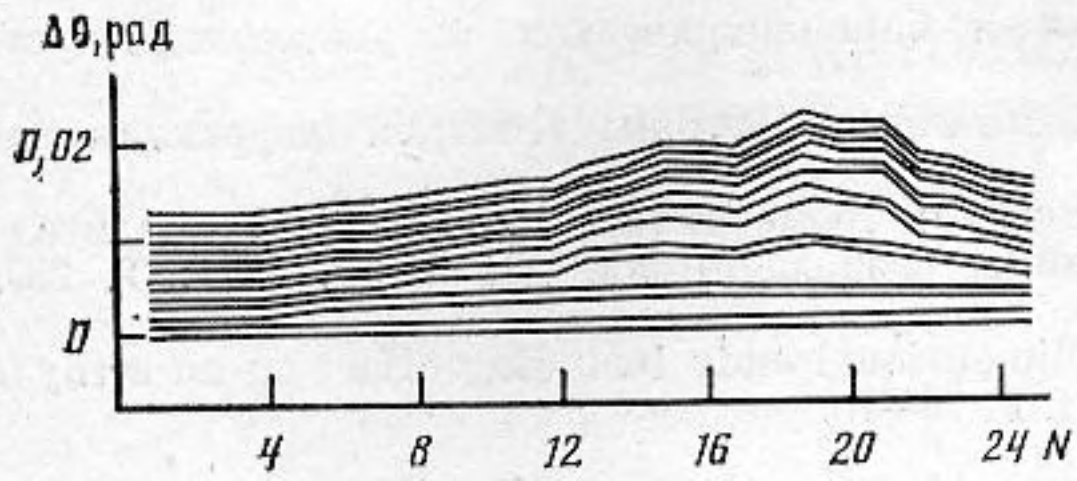
Расчеты лучевых фронтов, вертикальных и азимутальных углов на фронтах проводились для двух случаев: в прибрежном клине и в океаническом ринге и его окрестностях. Из точечного источника выпускалось семейство лучей с одним и тем же вертикальным углом выхода, но с разными азимутальными углами. По меньшей мере один луч из семейства проводился в той части среды, где возмущение отсутствовало, угловые характеристики всех остальных лучей сравнивались с характеристиками этого луча. Ось z системы координат в обоих случаях направлена вверх, $z=0$ соответствует поверхности океана.

Картины фронтов в прибрежном клине строились при $n^2(z) = {}^4/_9 + 0{,}005z$ и при $c(z)$, заданной табл. 1. Координаты источника (49; 100; −0,088). Рельеф дна показан в табл. 2, 3. Фронты проводились через 4 с, при вертикальном угле выхода лучей $-0{,}2 \leqslant \varphi \leqslant 0{,}2$ рад. Картины фронтов при различных вертикальных углах выхода показаны на фиг. 1. Отмечена относительная стабильность картины фронтов при изменении угла φ от −0,15 до 0,15 рад.

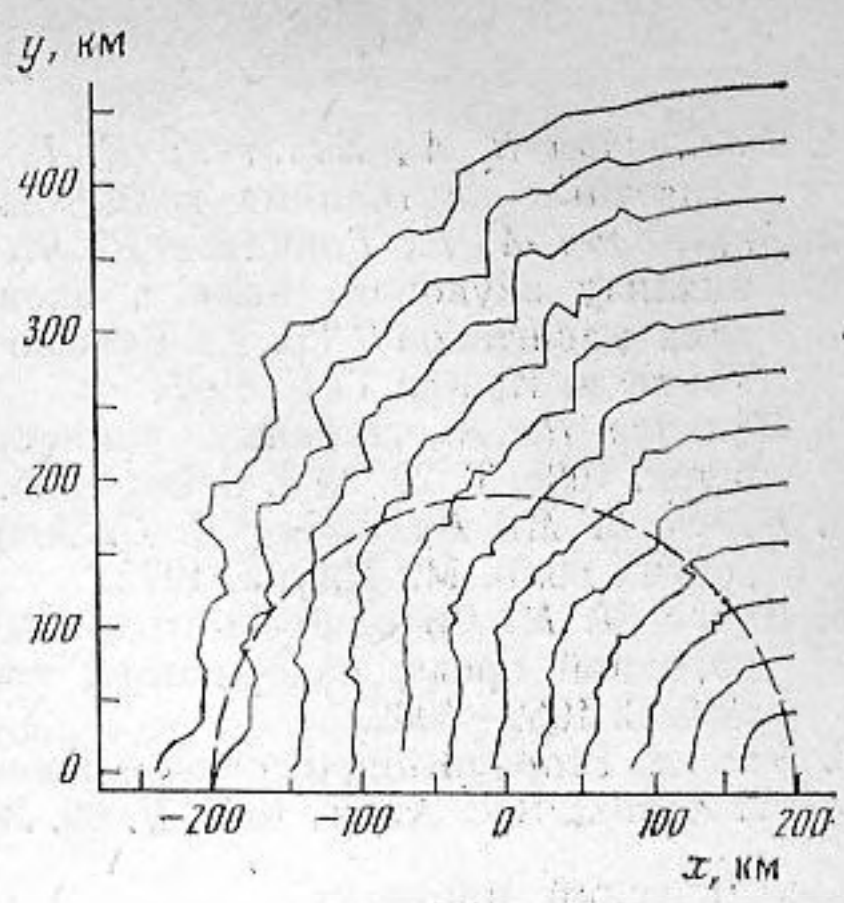
Таблица 2

x, км	$-z$, км
0	0
50	3

В случае распространения звука в океаническом ринге фронты также мало отличаются от окружностей. Мы рассматривали поведение лучей в ринге, осесимметричном относительно прямой ($x=0$, $y=0$), причем вертикальные профили скорости звука на различных расстояниях от оси показаны в табл. 4. Акватория триангулирована в соответствии с процедурой, изложенной выше. Схема триангуляции показана на рис. 2. Источник располагается в точке (203; 0,8; −0,4), т. е. на периферии ринга. Из него выпускалось семейство из 25 лучей с азимутальными углами выхода от $\pi/2$ до π. Фронты проведены через 22 с. Отклонения азимутального угла внутри ринга от значений, которые имели бы место в отсутствие ринга при вертикальном угле выхода лучей 0 рад, показаны на фиг. 3. Луч № 1 соответствует азимутальному углу выхода $\theta_1 = \pi/2$, а луч № 25 соответствует $\theta_{25} = \pi$. Видно, что отклонения вертикального угла весьма значительны и достигают 0,3 рад: в то же время максимальное отклонение азимутального угла составляют около 0,5°, что соответствует результатам, полученным в [6] для близкого по параметрам ринга. На фиг. 4 изображена картина смещения каустик (вид сверху) при вертикальном угле выхода 0 рад. Внешняя граница ринга изображена пунктирной окружностью. В случае отсутствия ринга, т. е. в слоистой среде, эти кривые представляли бы собой концент-



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Отклонения азимутального угла от значений, которые имели бы место в отсутствие ринга для семейства 25 лучей с одинаковым вертикальным углом выхода 0,1 рад. Фронты проведены через 10 с. Начало отсчета для каждой кривой сдвинуто относительно предыдущей на 0,001 рад. $\Delta\theta$ — отклонение угла, N — номер луча

Фиг. 4. Кривые, соединяющие точки касания лучей с каустиками (вид сверху). Использовано семейство 72 лучей с одинаковым вертикальным углом выхода 0,1 рад.

рические окружности с центром в точке (203; 0,8) км. Несмотря на то что картина лучевых фронтов была бы практически неотличима от концентрических окружностей, картина каустик имеет резко выраженные нерегулярности. Максимальное отклонение каустик от случая слоистой среды составляет около 50 км. Расположение каустик тесно связано с расположением соответствующих зон конвергенции и таким образом эта оценка показывает порядок величин смещения зон конвергенции при прохождении звуковых сигналов через океанский вихрь.

Таблица 3

x, км	$-z$, км	x, км	$-z$, км	x, км	$-z$, км	x, км	$-z$, км
0	0	2,5	0,22	8	0,545	25	3,038
0,4	0,185	2,8	0,25	9	1,4	28	2,702
1	0,2	3	0,3	10	1,55	30	2,51
1,2	0,215	4,3	0,3	12	2,38	50	2,51

Таблица 4

$-z$, м	$r=0$ c, м/с	$r=50$ км c, м/с	$r=100$ км c, м/с	$r=150$ км c, м/с	200 км $\leqslant r \leqslant$ 600 км c, м/с
0	1519	1519	1523	1526	1527
150	1510	1515	1523	1526	1527
200	1505	1510	1522	1525	1526
300	1500	1505	1521	1523	1526
360	1495	1500	1520	1522	1525
500	1489	1495	1515	1521	1524
600	1488	1492	1510	1520	1523
1000	1488	1491	1492	1500	1500
1400	1490	1490	1493	1496	1496
1800	1497	1497	1497	1498	1498
2000	1500	1500	1500	1500	1500
2400	1505	1505	1505	1505	1505
4500	1534	1534	1534	1534	1534

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянская В. А., Харатьян Е. Г.* Звуковое поле в океане в присутствии высокочастотных внутренних волн // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 3. С. 436–442.
2. *Воронович А. Г., Гончаров В. В.* Применение трехмерного лучевого алгоритма к анализу звукового поля в океане в присутствии неоднородностей синоптических масштабов // Тр. XI Всесоюз. симп. по дифракции и распространению волн. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1985.
3. *Мальцев Н. Е.* Лучевые уравнения в барицентрических координатах // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 5. С. 661–665.
4. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в теории дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
5. *Попов М. М.* Об одном методе вычисления геометрического расхождения в неоднородной среде, содержащей границы раздела // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 5. С. 1059–1062.
6. *Baer R.* Propagation through a three-dimensional eddy including effect on an array // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 69. № 1. P. 70–75.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22.V.1986