

с амплитудой на 10 дБ ниже максимума и вычислить некий аналог добротности  $Q_{10\text{дБ}}$  для кривой 1  $Q_{10}(1)=3,2$ , для кривых 2 и 3  $Q_{10}=3,7$ ,  $Q_{10}(4)=5,2$ ,  $Q_{10}(5)=6,8$ .

Из графика видно, что острота амплитудно-координатных характеристик модели улитки существенно зависит от распределения жесткости и массы вдоль ее поперечного сечения. Особенно заметным становится обострение, если в области максимума собственной функции масса увеличивается, а жесткость убывает, причем положение этого максимума в свою очередь зависит от распределения вышеуказанных параметров.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Новоселова С. М. Трехкамерная модель улитки внутреннего уха // Математические вопросы теории распространения волн. 15. Зап. науч. семин. ЛОМИ. Т. 148. Л.: Наука, 1985. С. 133-148.

Поступило в редакцию  
24.III.1986

Ленинградское отделение  
Математического института  
Академии наук СССР

УДК 534.2

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е.

Как известно, распространение акустических волн конечной амплитуды в плавно неоднородной среде вдоль лучевой траектории описывается уравнением Бюргерса с переменным коэффициентом диссипации (см., например, [1-3])

$$\frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial u}{\partial \tau} - B(z) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1)$$

Безразмерная функция  $u$ , координата  $z$  и коэффициент диссипации  $B(z)$  определяются изменением параметров поля и среды вдоль лучевой координаты  $s$  [1]:

$$u = q^{1/2} p / p_m, \quad z = \frac{1}{R_*} \int_{r_0}^s Q^{-1/2} ds, \quad B = \frac{\delta}{\varepsilon} q^{1/2}, \quad (2)$$

$$q = \frac{A}{a\sigma}, \quad Q = \frac{a^2 \Delta \sigma}{\varepsilon^2}, \quad A = \frac{\Delta}{\Delta_0}, \quad \sigma = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad a = \frac{c}{c_0}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \delta = \frac{b}{2\varepsilon_0}.$$

Здесь  $p$  — звуковое давление в волне,  $\Delta$  — площадь поперечного сечения лучевой трубки,  $c$  — скорость звука,  $\rho$  — плотность среды,  $\varepsilon$  — параметр нелинейности,  $R_* = \rho_0 c_0^3 T_m / \varepsilon_0 p_m$  — координата образования разрыва в плоской гармонической волне, распространяющейся в однородной среде, индекс «0» отмечает значения параметров среды и поля в лучевой координате  $s=r_0$ , на которой задается граничное условие,  $p_m$  и  $T_m$  — амплитуда и длительность акустической волны в точке  $r_0$ ,  $b$  — коэффициент диссипации,  $\tau = \left( t - \int_{r_0}^s ds/c(s) \right) / T_m$  — безразмерное время в сопровождающей системе координат.

В приведенных обозначениях (2) задача о распространении волны конечной амплитуды в неоднородной среде с потерями сводится к задаче о распространении плоской волны  $u$  вдоль прямолинейной координаты  $z$  в среде с переменными вдоль трассы потерями. Коэффициент  $B$  в такой постановке зависит от лучевой координаты  $s$ ; связь  $B$  с координатой  $z$  определяется из (2) совместным решением следующих выражений:

$$\frac{1}{R_*} \frac{ds}{dz} = Q^{1/2}(s), \quad B = \frac{\delta}{\varepsilon(s)} q^{1/2}(s) \quad (3)$$

Рассмотрим точное решение уравнения (1) методом разделения переменных. Представим  $u$  в виде произведения  $Z(z)\theta(\tau)$  и получим уравнение

$$\delta \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + m\theta + \theta \frac{d\theta}{d\tau} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $m$  — константа разделения. Отметим, что разделение переменных возможно только, если  $B(z) = \delta Z(z)$ , что дает следующую зависимость коэффициента затухания от координаты:

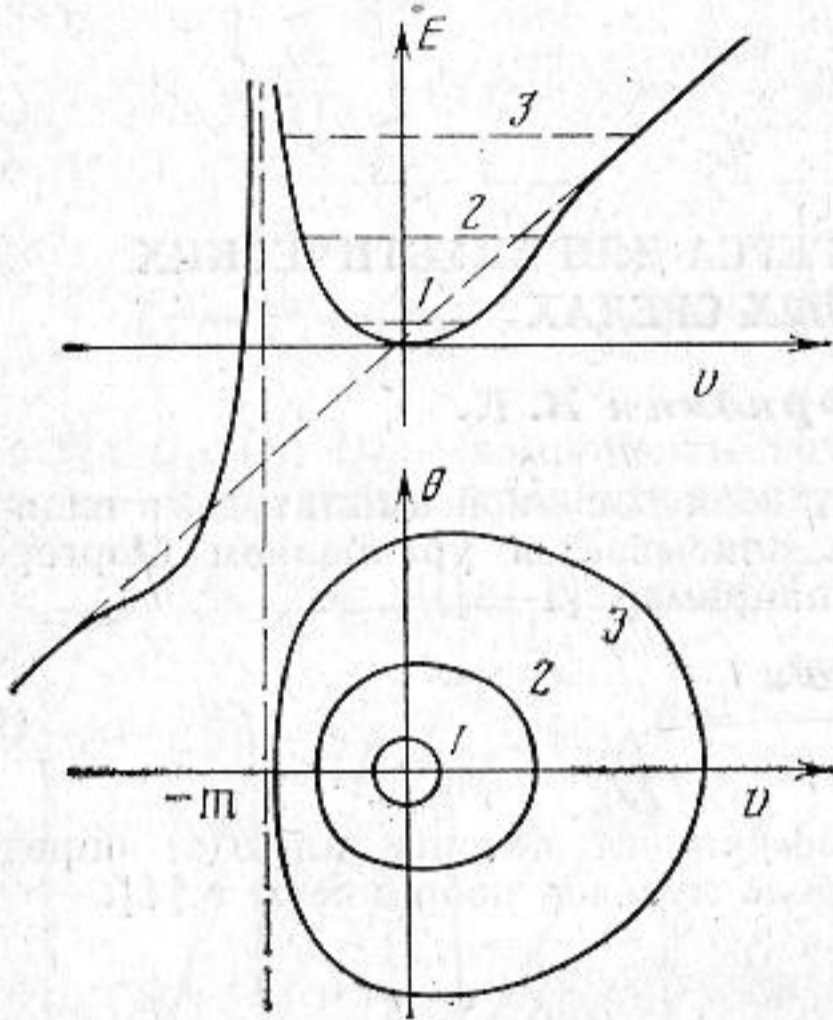
$$B(z) = \frac{\delta}{1+mz}. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) находится в квадратурах:

$$\tau = \pm \sqrt{\delta} \int \frac{dv}{(v+m)(C-2E(v))^{1/2}}; \quad (6)$$

$$\theta = \pm \sqrt{\delta} (C-2E(v))^{1/2}; \quad E(v) = v - m \ln \left| 1 + \frac{v}{m} \right|,$$

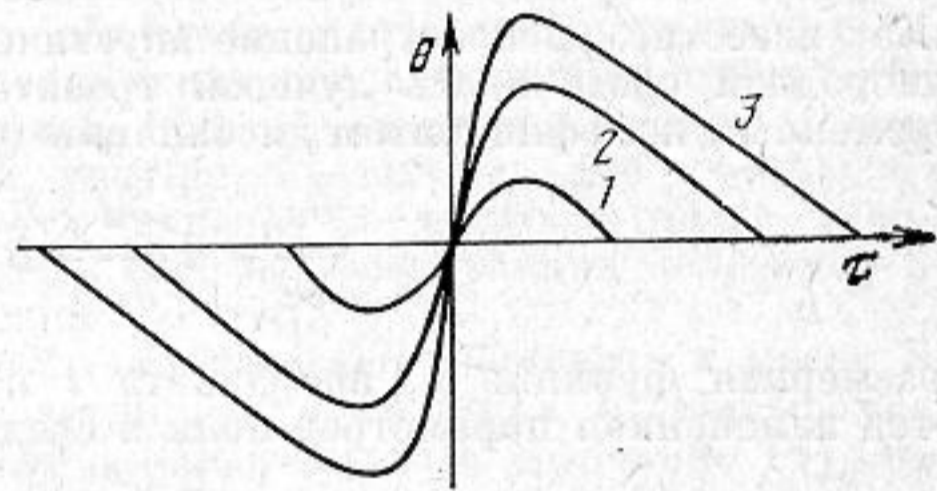
где  $C$  — константа интегрирования. При положительных значениях величины  $C$  существует решение в форме периодической волны (фиг. 1). При малых значениях величины  $C$  функция  $E \sim v^2$  и автомодельное решение (6) описывает синусоидаль-



Фиг. 1

Фиг. 1. Функция  $E(v)$  и фазовая поверхность, описывающая периодическую волну. Цифрами отмечены значения константы  $C$  в порядке нарастания

Фиг. 2. Форма периодической волны, соответствующая приведенным траекториям  $\theta(v)$



Фиг. 2

ную волну. С ростом величины  $C$ , т. е. с ростом амплитуды возмущения, крутизна фронта увеличивается неограниченно, но крутизна спада в волне стремится к величине  $-m$  (фиг. 2). Таким образом, ширина фронта достаточно интенсивной волны определяется в основном диссипацией, а градиент спада — только масштабом неоднородности.

Полученное точное решение (6) уравнения (1) имеет место в случае, когда коэффициент диссипации меняется по закону (5). Такое изменение возможно (см. (3), (5)), если параметры среды и поля связаны следующим соотношением:

$$R \cdot \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\varepsilon a^{1/2} \sigma^{1/2}}{A^{1/2}} \right\} = \frac{m\varepsilon}{a^{3/2} \sigma^{1/2} A^{1/2}} \quad (7)$$

Из анализа приведенного выражения видно, что величина  $m$  определяется масштабами нелинейности и неоднородности. Так, для типичного случая распространения плоской волны [4] в среде с переменной скоростью звука  $a = (1+s/L)^{1/2}$  величина  $m = 5R/2L$ . Обратим внимание, что величина  $m$  связана с масштабом нелинейности  $R$ , т. е. с амплитудой сигнала и, следовательно, с константой интегрирования  $C$ . Связь эта тем не менее не однозначна, поскольку меняя и амплитуду, и период волны можно составлять масштаб  $R$  неизменным.

Соотношение (7) позволяет проанализировать более сложные ситуации, когда изменяются одновременно большое число параметров среды и поля. Важно отметить, что полученное точное решение может являться эталоном при решении задач распространения волн конечной амплитуды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984. 154 с.
2. Crighton D. G. Propagation of non-uniform shock waves over large distances // Non-linear deformation waves IUTAM Symp. Springer, Berlin-Heidelberg, 1983. P. 115-130.

3. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.  
 4. Фридман В. Е. О распространении интенсивной акустической волны в плоско-слоистой среде // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 4. С. 621–622.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступило в редакцию  
29.IV.1986

УДК 534.232:534.222.2

## О РАСЧЕТЕ БЛИЖНЕГО ПОЛЯ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Фельдман М. В., Энгельбрехт Ю. К.

Двумерные эволюционные уравнения типа Заболотской – Хохлова [1–3] успешно применяются для расчета акустических пучков. Так как они построены с учетом одноволновости процесса, то они уже в принципе не могут описать интерференционные явления в ближнем поле ультразвукового излучателя. В этих целях обычно применяется классический подход согласно принципу Гюйгенса, который позволяет определить сложную структуру ближнего поля именно как интерференционную картину волн, генерированных бесконечным числом элементарных источников. Гюйгенсовские источники создают в конечном итоге конечное число результирующих волн, которые хорошо различаются на теневых фотографиях ближнего поля ультразвукового излучателя [4]. При этом четко различаются фронты плоской и краевой волн. Возникает естественный вопрос – можно ли, опираясь на эксперимент, рассчитать ближнее поле излучателя с учетом конечного числа волн, используя для этого хорошо разработанный аппарат одномерных эволюционных уравнений. Рассчитанное суммарное поле служит тогда на выходе на дальнейшее поле начальным условием для двумерного эволюционного уравнения, описывающего искажение пучка в одноволновом приближении. Такой подход позволяет придерживаться единой методики расчета и уже в ближнем поле учитывать нелинейные, диссипативные и дисперсионные эффекты.

Согласно принципу Гюйгенса, дополнительное давление определяется интегралом Гюйгенса – Рэлея [5]

$$p = jk\rho c_0/2\pi \int_S (v/r) \exp(-jkr) dS, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число,  $\rho$  и  $c_0$  – плотность и скорость звука среды,  $r$  – расстояние от элементарного источника до рассматриваемой точки и  $v dS$  – элементарный источник на плоскости излучателя. Результаты расчета для круглого излучателя с радиусом  $R=5$  мм и частотой 5 МГц представлены на фиг. 1, где показано распределение безразмерной скорости (относительно скорости  $v$ ) на оси пучка. Последний максимум, как и полагается [5], соответствует абсциссе  $x=R^2/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны. Результаты расчета совпадают с известными [6] и проверены экспериментально [7].

Предположим теперь, что интерференционная картина в ближнем поле круглого излучателя образуется из плоской волны, генерированной от плоскости излучателя, и краевой волны, генерированной от периметра излучателя. Как с математической (сингулярность краевой волны как цилиндрической при  $x=0$ ), так и с физической (определенный слой жидкости толщиной порядка  $\lambda$  движется как жесткое тело) точек зрения граничные условия задаются при  $x=x'$ . Вполне ясно, что выбор значения  $x'$  является в определенном смысле условным. По физическим соображениям это расстояние порядка длины волны. Изменение значения  $x'$  в одну или в другую сторону приводит к другим соотношениям амплитуд краевой и плоской волн, но структура ближнего поля в районе последнего максимума остается качественно неизменной. В дальнейших расчетах принято  $x'=2$  мм, но контрольные расчеты с другими значениями  $x'$  дали тоже удовлетворительные результаты. Этот вопрос требует дальнейшего анализа, что, однако, выходит за рамки данной работы. Необходимо определить начальные амплитуды обеих волн, а также сдвиг фазы краевой волны. По данным авторов статьи [4], сдвиг фазы равен  $\pi$ , что подтверждается и численным экспериментом. Для определения амплитуд требуем равенства скоростей при  $x=R^2/\lambda$  (место последнего максимума), рассчитанных по принципу Гюйгенса и по эволюционным уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + nv/(2\tau) = 0, \quad \tau = \varepsilon x, \quad (2)$$

где  $n=0,1$  для плоской и краевой (цилиндрической) волн соответственно и  $\varepsilon$  – малый параметр [1]. Обычно  $\varepsilon=v_0/c_0$ , где  $v_0$  – максимальная амплитуда начального воздействия. Это условие дает начальные воздействия:

$$v_p = \frac{1}{2} 0,0153v \sin(\omega t - kx),$$

$$v_c = \pi \cdot 0,0153v (x')^{1/2} (x^2 + R^2)^{-1/4} \sin(\omega t - k(x^2 + R^2)^{1/2} + \pi),$$

для плоской и цилиндрической волн соответственно.