

$-z \cos \vartheta_m$ (линия I на фигуре, ϑ_m — угол полного отражения). Заштрихованная область на фигуре соответствует области существования боковой волны. Давление в боковой волне вблизи ее переднего фронта ($\psi_1 \rightarrow \alpha$) спадает по закону R^{-2} , а в области $t \rightarrow R/c_1$, $|t - R/c_1| \ll t$ давление в боковой волне изменяется по закону

$$p_{\text{бок}}(\chi > \vartheta_m) = \frac{Q \cos \chi}{2\pi^2 R M_1 (t - R/c_1)} \left[\frac{\text{Im } V(\cos \chi)}{\cos^2 \chi - M_1^{-2}} + \text{Im } W(\cos \chi) \right]. \quad (2)$$

Из этой формулы видно, что в области углов, больших ϑ_m , поле переходного излучения появляется перед сферическим фронтом, а его амплитуда сильно возрастает при приближении к сфере $R = c_1 t$. За сферическим фронтом поле определяется соотношением:

$$p(t \geq R/c_1, \chi > \vartheta_m) = \frac{Q \cos \chi \delta(t - R/c_1)}{2\pi R M_1} \left[\frac{\text{Re } V(\cos \chi)}{\cos^2 \chi - M_1^{-2}} + \text{Re } W(\cos \chi) \right] + p_{\text{бок}} \quad (3)$$

и состоит из сосредоточенного и распределенного импульсов переходного излучения. В области углов $\chi < \vartheta_m$ импульс переходного излучения остается сосредоточенным.

Аналогично исследуется поле в нижней среде. При условии $c_1 < c_2$ в нижней среде импульс переходного излучения имеет δ -образную форму, что связано с отсутствием полного отражения во второй среде.

Измеряя длительность переходного излучения в зависимости от угла наблюдения, можно определить скорость звука в нижней среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев В. П. К теории излучения звуковых волн при движении малых тел в газообразных средах // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. Вып. 2 (8). С. 595–604.
2. Коломенский Ал. А. Переходное излучение звука оптико-акустическим источником: Препринт № 123. М.: ФИАН СССР, 1979.
3. Павлов В. И., Сухоруков А. И. Переходное излучение акустических волн // УФН. 1985. Т. 147. Вып. 1. С. 83–115.
4. Курин В. В., Немцов В. Е., Эйдман В. Я. Предвестник и боковые волны при отражении импульсов от границы раздела двух сред // УФН, 1985. Т. 147. Вып. 1. С. 157–180.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступило в редакцию
20.III.1986

УДК 534.756:612.858.1

О ЗАВИСИМОСТИ ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ БАЗИЛЯРНОЙ МЕМБРАНЫ ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАССЫ И ЖЕСТКОСТИ ПО ЕЕ ПОПЕРЕЧНОМУ СЕЧЕНИЮ

Новоселова С. М.

Избирательные свойства линейной гидромеханической модели улитки внутреннего уха могут быть значительно улучшены только за счет перераспределения в поперечном сечении параметров базилярной мембраны без привлечения механизма добавки акустической энергии за счет центральной нервной системы.

Известно, что гистологи различают две части поперечного сечения базилярной мембраны: 1 — «зона аркуата» несущая на себе арку кортиева органа, составленная из одного тонкого слоя радиально направленных коллагеновых волокон, и 2 — непрерывно переходящая в нее «зона пектината» в два параллельных слоя волокон, полая внутри и свободная от нагрузки снаружи. При этом арка кортиева органа представляется рыхлой структурой, группы ее клеток разделены многочисленными каналами и межклеточными щелями, в которых циркулирует эндолимфа.

Естественно сделать допущение, что в зоне аркуата масса велика, а поперечная компонента жесткости мала по сравнению с зоной пектината. Чтобы выяснить, как влияет это обстоятельство на акустический анализ в улитке, построена математическая модель с неравномерно распределенными по сечению жесткостью и массой.

Улитка рассматривается как слабо нерегулярный волновод с параметрами, которые медленно и монотонно меняются вдоль его длины и произвольным образом распределены в поперечном сечении.

Постановка задачи и общий вид решения аналогичны построенным ранее волноводным гидромеханическим моделям с однородным сечением [1].

Рассмотрим дисперсионное уравнение для модели, имеющей одну продольную упругую перегородку — базиллярную мембрану [1]:

$$\int_{y_0}^{y_0+b} D_y (\eta_1'')^2 dy - \omega^2 \int_{y_0}^{y_0+b} \mu \eta_1^2 dy - \xi^2 \int_{y_0}^{y_0+b} [D_1 \eta_1'' + (D_1 \eta_1)' + 4(D_{xy} \eta_1)'] \eta_1 dy +$$

$$+ \xi^4 \int_{y_0}^{y_0+b} D_x \eta_1^2 dy - 2\rho \omega^2 L \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\text{cth}(\xi_j H) A_j^2}{\xi_j \delta_j} \left(1 - \frac{\delta h}{2} \xi_j^2 \right) = 0, \quad (1)$$

где

$$A_j = \frac{1}{L} \int_{y_0}^{y_0+b} \eta(y-y_0) \cos \frac{j\pi y}{b} dy; \quad \delta_j = \begin{cases} 1 & (j=0) \\ 1/2 & (j \neq 0) \end{cases}; \quad \delta^2 = \frac{iv}{\omega};$$

$$\xi_j^2 = \xi^2 + \frac{j^2 \pi^2}{L^2}; \quad \eta(y_0) = \eta(y_0+b) = 0; \quad \eta''(y_0) = \eta''(y_0+b) = 0.$$

Здесь D_x, D_y, D_1, D_{xy} — компоненты ортотропной жесткости базиллярной мембраны (ВМ), μ — ее поверхностная плотность, ρ — объемная плотность перилимфы, ν — вязкость жидкости в пограничном слое, h — толщина ВМ, H — высота каналов, L — ширина улитки, b — ширина ВМ ($b < L$), ω — частота сигнала, ξ — волновое число, и η_1 — старшая собственная функция колебания поперечного сечения ВМ.

Обычно полагают жесткость и массу ВМ не зависящими от y , тогда $\eta_1(y) = \sin(\pi(y-y_0)/b)$ и коэффициенты уравнения (1) определяются аналитически.

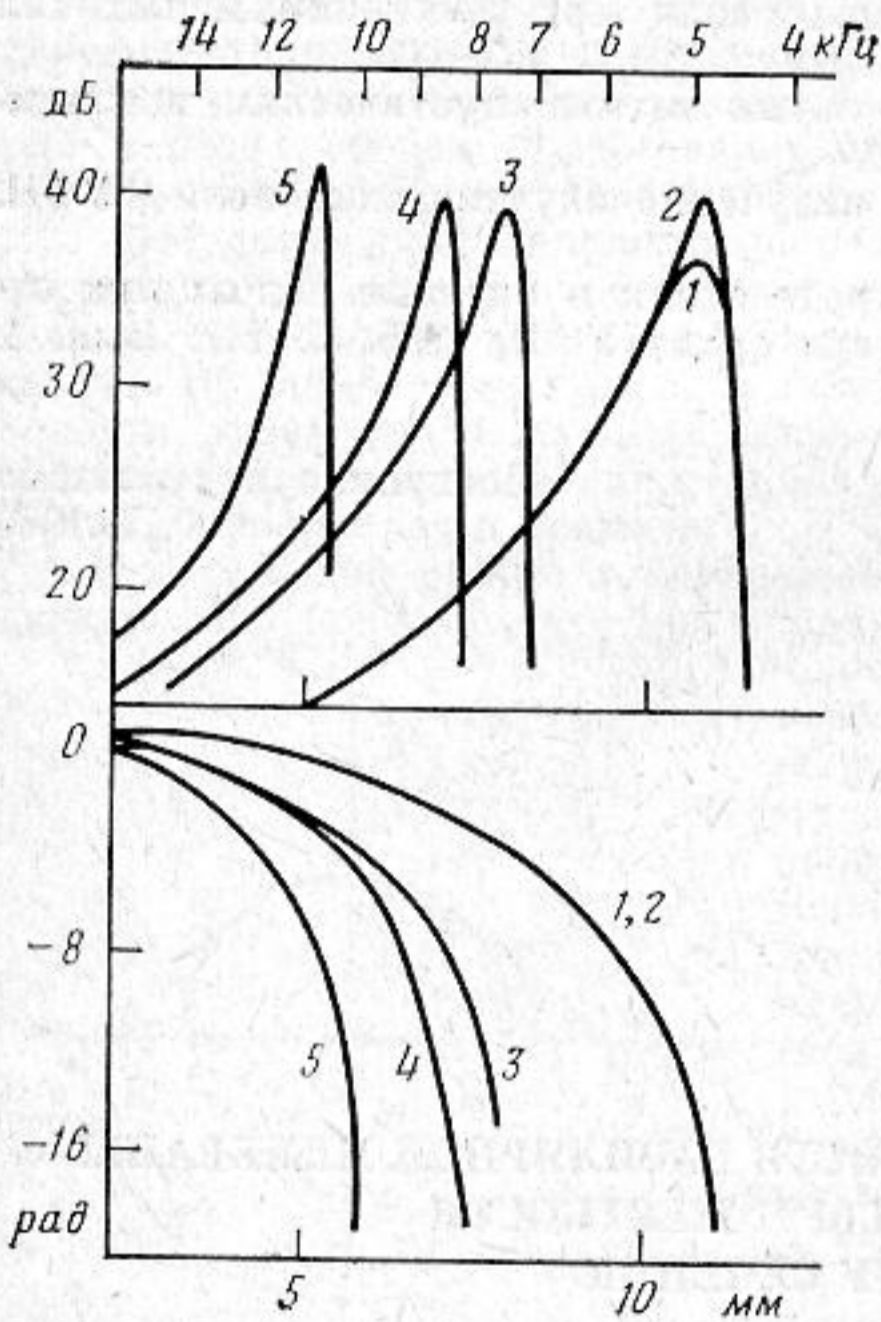
Для неравномерного распределения по сечению параметров упругой перегородки собственные функции и собственные частоты колебания сечений можно вычислить приближенно, воспользовавшись методом Ритца.

Все остальные аспекты модели не отличаются от двухкамерного варианта улитки, рассмотренного в работе [1].

Результаты расчета на ЭВМ откликов модели на частоту 8 кГц показаны на фигуре. По оси абсцисс отложено расстояние вдоль длины улитки, по оси ординат — отношение максимальной по сечению амплитуды смещения базиллярной мембраны $A(x)$ к амплитуде смещения стремечка A_s в децибелах и фазовый сдвиг в радианах. Средние по сечению параметры такие же, как в основном варианте двухкамерной модели [1].

Кривые 1 представляют собой амплитудно-координатную характеристику отклика модели с однородным сечением [1]. Кривые 2 характеризуют отклик модели с постоянной вдоль сечения поперечной компонентой жесткости, при этом поверхностная плотность μ_a левой половины сечения в 10 раз превосходит плотность правой половины μ_p . Отклик 3 соответствует модели, в которой $\mu_a = \mu_p$, а жесткость левой половины D_a составляет 0,1 жесткости правой половины D_p . В модели 4 $\mu_a = 10\mu_p$, $D_a = 0,1D_p$. Кривые 5 описывают отклик перегородки, жесткость которой в средней трети уменьшается до 0,1 жесткости на краях, а масса сконцентрирована в центральной $1/3$ части, где ее плотность в 10 раз превышает плотность остальной поверхности мембраны. Эта кривая в некотором приближении моделирует вариант, когда гибкий податливый край спиральной костяной пластинки, расположенный под спиральной вырезкой, служит как бы продолжением базиллярной мембраны.

Если сопоставить каждой абсциссе x_i соответствующую ей характеристическую частоту, то можно определить для каждого отклика полосу пропускания сигналов



Зависимость амплитудно-фазо-координатной характеристики отклика базиллярной мембраны модели улитки внутреннего уха от распределения массы и жесткости в поперечном сечении

Зависимость амплитудно-фазо-координатной характеристики отклика базиллярной мембраны модели улитки внутреннего уха от распределения массы и жесткости в поперечном сечении

с амплитудой на 10 дБ ниже максимума и вычислить некий аналог добротности $Q_{10\text{дБ}}$ для кривой 1 $Q_{10}(1)=3,2$, для кривых 2 и 3 $Q_{10}=3,7$, $Q_{10}(4)=5,2$, $Q_{10}(5)=6,8$.

Из графика видно, что острота амплитудно-координатных характеристик модели улитки существенно зависит от распределения жесткости и массы вдоль ее поперечного сечения. Особенно заметным становится обострение, если в области максимума собственной функции масса увеличивается, а жесткость убывает, причем положение этого максимума в свою очередь зависит от распределения вышеуказанных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новоселова С. М. Трехкамерная модель улитки внутреннего уха // Математические вопросы теории распространения волн. 15. Зап. науч. семин. ЛОМИ. Т. 148. Л.: Наука, 1985. С. 133-148.

Поступило в редакцию
24.III.1986

Ленинградское отделение
Математического института
Академии наук СССР

УДК 534.2

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е.

Как известно, распространение акустических волн конечной амплитуды в плавно неоднородной среде вдоль лучевой траектории описывается уравнением Бюргерса с переменным коэффициентом диссипации (см., например, [1-3])

$$\frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial u}{\partial \tau} - B(z) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1)$$

Безразмерная функция u , координата z и коэффициент диссипации $B(z)$ определяются изменением параметров поля и среды вдоль лучевой координаты s [1]:

$$u = q^{1/2} p / p_m, \quad z = \frac{1}{R_*} \int_{r_0}^s Q^{-1/2} ds, \quad B = \frac{\delta}{\varepsilon} q^{1/2}, \quad (2)$$

$$q = \frac{A}{a\sigma}, \quad Q = \frac{a^2 \Delta \sigma}{\varepsilon^2}, \quad A = \frac{\Delta}{\Delta_0}, \quad \sigma = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad a = \frac{c}{c_0}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \delta = \frac{b}{2\varepsilon_0}.$$

Здесь p — звуковое давление в волне, Δ — площадь поперечного сечения лучевой трубки, c — скорость звука, ρ — плотность среды, ε — параметр нелинейности, $R_* = \rho_0 c_0^3 T_m / \varepsilon_0 p_m$ — координата образования разрыва в плоской гармонической волне, распространяющейся в однородной среде, индекс «0» отмечает значения параметров среды и поля в лучевой координате $s=r_0$, на которой задается граничное условие, p_m и T_m — амплитуда и длительность акустической волны в точке r_0 , b — коэффициент диссипации, $\tau = \left(t - \int_{r_0}^s ds/c(s) \right) / T_m$ — безразмерное время в сопровождающей системе координат.

В приведенных обозначениях (2) задача о распространении волны конечной амплитуды в неоднородной среде с потерями сводится к задаче о распространении плоской волны u вдоль прямолинейной координаты z в среде с переменными вдоль трассы потерями. Коэффициент B в такой постановке зависит от лучевой координаты s ; связь B с координатой z определяется из (2) совместным решением следующих выражений:

$$\frac{1}{R_*} \frac{ds}{dz} = Q^{1/2}(s), \quad B = \frac{\delta}{\varepsilon(s)} q^{1/2}(s) \quad (3)$$

Рассмотрим точное решение уравнения (1) методом разделения переменных. Представим u в виде произведения $Z(z)\theta(\tau)$ и получим уравнение

$$\delta \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + m\theta + \theta \frac{d\theta}{d\tau} = 0. \quad (4)$$