АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 2

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.222

О НЕЛИНЕЙНЫХ ИСТОЧНИКАХ В ОБЛАСТИ НАЛОЖЕНИЯ СХОДЯЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

Баранник Е. А., Кадников О. Г.

В работе [1] было показано, что при наложении сферически фокусированных пучков волн звук комбинационной разностной частоты может рассеиваться на большие углы. Этот результат связывался со специфическим видом функции плотности нелинейных источников волн разностной частоты (ВРЧ) в фокальной области и, в частности со скоростью нелинейных источников в фокальной области. В настоящей работе эта зависимость изучена более подробно и вычислены предельные углы рассеяния звука.

Как известно, роль источника вторичных волн играет нелинейная часть уравнения колебаний [2]; с учетом уравнения непрерывности пространственную плотность источника q можно представить в виде

$$-4\pi q=-\frac{\gamma-1}{2\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\rho'^2-\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(v_iv_j),\tag{1}$$

где $\rho'=\rho_1+\rho_2$ — возмущение плотности от равновесного значения ρ_0, $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ — колебательная скорость, c_0 — равновесная скорость звука и $\gamma=1+(\partial c^2/\partial\rho)\rho_0/c_0^2$ — эмпирическая константа среды. Для вычисления величин $\rho_{1,2}$ и $\mathbf{v}_{1,2}$, характеризующих фокусированные волны накачки ω_1 и ω_2, воспользуемся интегральной формулой Дебая, описывающей потенциал скоростей Φ сходящихся сферических волн. Тогда для возмущения плотности $\rho_{1,2}=-\rho_0c_0^{-2}\partial\Phi_{1,2}/\partial t$ имеем

$$\rho_{1,2}=-\rho_0\frac{v_{1,2}}{c_0}f\frac{\omega_{1,2}}{c_0}\int\limits_{\alpha_{1,2}}^{\tilde{\alpha}_{1,2}}J_0\left(\frac{\omega_{1,2}}{c_0}r_\perp\sin\theta_{1,2}\right)\sin\left[\omega_{1,2}t-\frac{\omega_{1,2}}{c_0}(f+x\cos\theta_{1,2})\sin\theta_{1,2}d\theta_{1,2}\right],\tag{2}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя, $v_{1,2}$ — амплитуда скорости на излучающей поверхности, f — фокусное расстояние, $\alpha_{1,2}<\tilde{\alpha}_{1,2}$ — углы раскрытия волнового фронта, $r_\perp$ — расстояние по нормали от акустической оси Ox. Аналогичный вид имеет выражение для колебательной скорости. По физическому смыслу формула (2) представляет собой сумму плоских волн, приходящих в точку $\mathbf{r}$ из разных направлений.

Следуя [1], ограничимся рассмотрением пучков с малыми углами раскрытия. В этом случае для источника волн комбинационных частот $\Omega_\pm=\omega_1\pm\omega_2$ находим

$$q=\frac{\varepsilon}{2\pi\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho_1\rho_2)\equiv q_-+q_+,\tag{3}$$

где $\varepsilon=(\gamma+1)/2$. Подставляя (2) в (3), окончательно получаем

$$q_\pm=\pm\frac{\varepsilon}{4\pi}\rho_0\frac{v_1v_2}{c_0^2}f^2\frac{\omega_1\omega_2}{c_0^2}\int\limits_{\alpha_1}^{\tilde{\alpha}_1}\int\limits_{\alpha_2}^{\tilde{\alpha}_2}J_0\left(\frac{\omega_1}{c_0}r_\perp\sin\theta_1\right)J_0\left(\frac{\omega_2}{c_0}r_\perp\sin\theta_2\right)\left(\Omega_\pm\frac{c_0}{c_\pm}\right)^2\times$$
$$\times\cos\Omega_\pm\left[t-\left(\frac{f}{c_0}+\frac{x}{c_\pm}\right)\right]\sin\theta_1\sin\theta_2\,d\theta_1\,d\theta_2,\tag{4}$$

где $c_\pm=c_0\Omega_\pm(\omega_1\cos\theta_1\pm\omega_2\cos\theta_2)^{-1}$.

Из (4) видно, что применение формул Дебая позволяет представить источник вторичных волн с частотой $\Omega_\pm$ (и плотностью $q_\pm$) в виде набора источников, отличающихся скоростью распространения. Нетрудно убедиться, что больше c_0 скорость c_- источников ВРЧ, образовавшихся в результате взаимодействия волн накачки с углами θ_1 и θ_2, удовлетворяющими неравенству

$$\left(1-\frac{\Omega_-}{\omega_1}\right)\sin^2\frac{\theta_2}{2}<\sin^2\frac{\theta_1}{2}\leqslant\frac{\Omega_-}{2\omega_1}+\left(1-\frac{\Omega_-}{\omega_1}\right)\sin^2\frac{\theta_2}{2}. \qquad (5)$$

Знак равенства в правой части (5) отвечает источникам, чья скорость $c_-\to\pm\infty$. Если же

$$\frac{\Omega_-}{2\omega_1}+\left(1-\frac{\Omega_-}{\omega_1}\right)\sin^2\frac{\theta_2}{2}<\sin^2\frac{\theta_1}{2}<\frac{\Omega_-}{\omega_1}+\left(1-\frac{\Omega_-}{\omega_1}\right)\sin^2\frac{\theta_2}{2}, \qquad (6)$$

то $c_-<-c_0$; такие источники движутся в направлении, противоположном направлению волн накачки. Сверхзвуковое движение источников (5), (6) приводит к тому, что возбуждаемые ими волны распространяются под некоторым углом φ к направлению движения (аналогично черенковскому излучению). Связь между направлением распространения вторичных волн и скоростью нелинейных источников дается формулой черенковского конуса [3, с. 554]

$$\cos\varphi=c_0/c_\pm, \qquad (7)$$

поэтому для источников (6) $\varphi>\pi/2$ (рассеяние назад). Это явление лежит в основе эффекта широкой диаграммы ВРЧ [1].

Из (7) следует, что максимальные углы рассеяния ВРЧ и волн суммарной частоты имеют вид

$$\tilde{\varphi}_-=2\arcsin\left\{\sin^2\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\omega_1}{\Omega_-}\left(\sin^2\frac{\tilde{\alpha}_1}{2}-\sin^2\frac{\tilde{\alpha}_2}{2}\right)\right\}^{1/2}, \qquad (8)$$

$$\tilde{\varphi}_+=2\arcsin\left\{\sin^2\frac{\tilde{\alpha}_2}{2}+\frac{\omega_1}{\Omega_+}\left(\sin^2\frac{\tilde{\alpha}_1}{2}-\sin^2\frac{\tilde{\alpha}_2}{2}\right)\right\}^{1/2}, \qquad (9)$$

поэтому диаграмма волн суммарной частоты не может быть шире диаграммы волн накачки, а диаграмма ВРЧ тем шире, чем меньше Ω_-. Максимальный угол (8) несколько больше найденного в [1]; однако интенсивность рассеянного звука при $\varphi\to\tilde{\varphi}_-$ падает до нуля, так как уменьшается число источников ВРЧ, излучающих волны в этом направлении. Заметим, что множитель $(\Omega_-c_0/c_-)^2$ в подынтегральном выражении формулы (4) согласно (7) равен $\Omega_-{}^2\cos^2\varphi$, поэтому амплитуда ВРЧ стремится к нулю и при $\varphi\to\pi/2$; этот результат относится лишь к сферическим волнам накачки с малыми углами раскрытия (ср. (1) и (3)).

Минимальный угол рассеяния ВРЧ описывается выражением

$$\varphi_-=2\arcsin\left\{\sin^2\frac{\tilde{\alpha}_2}{2}+\frac{\omega_1}{\Omega_-}\left(\sin^2\frac{\alpha_1}{2}-\sin^2\frac{\tilde{\alpha}_2}{2}\right)\right\}^{1/2},$$

равен α_1 при $\tilde{\alpha}_2=\alpha_1$ и возрастает при $\Omega_-\to 0$, если $\alpha_1>\tilde{\alpha}_2$.

Формулы Дебая справедливы, строго говоря, в фокальной области $r\ll f$. При $r\gg f$ волны накачки становятся сферически расходящимися, а скорость возникающих здесь источников ВРЧ $c_-\simeq c_0$. Таким образом, область, где скорость источников может быть существенно больше c_0, ограничена, поэтому при $\Omega_-\lessapprox c_0/x_0$, где $x_0\lessapprox f$ – линейный размер указанной области, необходимо учитывать дифракцию ВРЧ, возбуждаемых сверхзвуковым источником. В этом случае формула (7) описывает не направление распространения ВРЧ, а направление, соответствующее главному максимуму рассеяния звука. Иными словами, соотношение (7), устанавливающее связь между направлением распространения ВРЧ и скоростью сверхзвукового источника, выполняется с точностью до величин порядка $O(\Lambda_-/x_0)$ где Λ_- – длина ВРЧ.

В заключение отметим, что метод расчета, основанный на решении одномерного параболического уравнения теории дифракции [4], позволяет в отличие от [1] вычислять характеристики поля ВРЧ как в дальней, так и в ближней зонах, но не учитывает наличия в фокальной области сверхзвуковых источников. С этой точки зрения указанные подходы являются взаимодополняющими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранник Е. А., Кадников О. Г., Папакица В. В.* О рассеянии звука звуком при наложении фокусированных пучков волн // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 513–517.
2. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
4. *Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И.* Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Поступило в редакцию
24.III.1986