АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 2

УДК 534.26

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ПОТЕРЬ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ РЕЗОНАТОРА ДЛЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН

Лапин А. Д.

Исследовано рассеяние изгибных волн от резонатора, установленного на пластине, в предположении, что коэффициент упругости его является комплексной величиной.

Известно [1–4], что изгибные волны в пластине можно изолировать при помощи резонаторов, присоединенных к ней. Простейшим резонатором является пружина с грузом. Такой резонатор, расположенный перпендикулярно пластине и присоединенный пружиной к ней, интенсивно рассеивает изгибные волны, распространяющиеся в этой пластине. Представляет интерес исследовать влияние диссипативных потерь в резонаторе на эффективность работы его в качестве рассеивателя изгибных волн и оценить соотношение рассеянной и поглощенной энергий. Ниже выполнено соответственное исследование в предположении, что коэффициент упругости пружины является комплексной величиной.

Пусть безграничная тонкая пластина лежит в плоскости xy и к ней в точке $(0, 0)$ присоединен резонатор с массой m и коэффициентом упругости $\varkappa(1-i\varepsilon)$, где ε — коэффициент диссипации. На резонатор падает изгибная волна со смещением

$$w^{(0)}(x, t)=A\exp[i(kx-\omega t)], \tag{1}$$

где k — волновое число изгибной волны в пластине, ω — частота звука. Под действием волны (1) резонатор возбуждается и излучает поле $w^{(1)}(x, y, t)$. Полное поле w в пластине равно $w^{(0)}+w^{(1)}$.

Обозначим через $w'(t)$ — смещение груза резонатора. Уравнение движения этого груза имеет вид

$$m\frac{d^2w'}{dt^2}=-F(t), \tag{2}$$

где сила F определяется по формуле

$$F(t)=\varkappa(1-i\varepsilon)[w'(t)-w(0, 0, t)]. \tag{3}$$

Уравнение пластины, соединенной с резонатором, можно написать в виде

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\Delta^2 w=F(t)\delta(x)\delta(y), \tag{4}$$

где h и D — соответственно толщина и цилиндрическая жесткость пластины, ρ — плотность среды, Δ — оператор Лапласа, $\delta(x)$ — дельта-функция. Поскольку падающая волна $w^{(0)}$ является свободной волной, то в левой части уравнения (4) можно заменить w на $w^{(1)}$.

Рассеянное поле в пластине получим следующим способом. Рассчитаем смещения пластины и груза, создаваемые точечной гармонической силой $F(t)=F_0\exp(-i\omega t)$, где F_0 — комплексная амплитуда. Пользуясь методом Фурье, получим следующее выражение для $w^{(1)}$:

$$w^{(1)}(x, y, t)=\frac{iF_0}{8k^2D}\{H_0^{(1)}(kr)-H_0^{(1)}(ikr)\}\exp(-i\omega t), \tag{5}$$

где $H_0^{(1)}(kr)$ — функция Ханкеля первого рода, $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Согласно уравнению (2), смещение груза будет

$$w'(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}\exp(-i\omega t). \qquad (6)$$

Амплитуду F_0 подберем таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение (3). Подставляя формулы (1), (5) и (6) в это соотношение, получим искомую амплитуду силы

$$F_0 = i\omega A\left\{\left[\frac{\omega}{8k^2D}+\frac{\varepsilon\omega}{\varkappa(1+\varepsilon^2)}\right]+i\left[\frac{1}{m\omega}-\frac{\omega}{\varkappa(1+\varepsilon^2)}\right]\right\}^{-1}.$$

Рассеянное поле $w^{(1)}$ получим по формуле (5) при подстановке F_0 в нее.

Собственная частота ω_0 резонатора с потерями равна $\sqrt{(1+\varepsilon^2)\varkappa/m}$. При $\omega=\omega_0$ рассеянное поле имеет вид

$$w^{(1)}(x,y,t) = -\frac{A}{(1+\tau)}\{H_0^{(1)}(k_0r)-H_0^{(1)}(ik_0r)\}\exp(-i\omega_0 t), \qquad (7)$$

где $\tau = \frac{8k_0^2D\varepsilon}{m\omega_0^2}$, $k_0=(\rho h\omega_0^2/D)^{1/4}$. Согласно этой формуле, смещение $w^{(1)}(0,0,t)$ равно $-\frac{A}{(1+\tau)}\exp(-i\omega_0 t)$. В волновой зоне ($k_0r\gg1$) формулу (7) можно преобразовать к виду

$$w^{(1)}(x,y,t) = -\frac{A}{(1+\tau)}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\exp[i(k_0r-\omega_0 t-\pi/4)].$$

Вычислим мощность, уносимую рассеянным полем. Усредненный за период поток энергии, отнесенный к единичной длине окружности большого радиуса, равен

$q' = \frac{1}{2}\rho h\omega_0^2B^2u$, где $B = \frac{A}{(1+\tau)}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}$ — амплитуда рассеянной волны при $k_0r\gg1$, $u=2\omega_0/k_0$ — групповая скорость изгибной волны. Полный усредненный поток энергии будет

$$Q'=2\pi rq' = \frac{4\rho h\omega_0^3A^2}{k_0^2(1+\tau)^2}.$$

Величину $Q'/q^{(0)}$, где $q^{(0)}={}^1/_2\rho h\omega_0^2A^2u$ — усредненный поток энергии в падающей волне, отнесенный к единичной длине по оси y, обозначим через $\sigma_{\text{расс}}$ и назовем поперечником рассеяния резонатора, $\sigma_{\text{расс}} = \frac{4}{k_0(1+\tau)^2}$. В отсутствие потерь ($\varepsilon=0$) поперечник рассеяния равен $\sigma_0=2\lambda_0/\pi$, где $\lambda_0=$ $=2\pi/k_0$ — длина изгибной волны.

Вычислим мощность, поглощаемую резонатором при $\omega=\omega_0$. Она равна работе, совершаемой пластиной над резонатором, и определяется по формуле

$$Q_{\text{погл}}=-\widetilde{\operatorname{Re}F(t)\operatorname{Re}\{-i\omega_0 w(0,0,t)\}},$$

где

$$F(t)=i\frac{m\omega_0^2\tau A}{\varepsilon(1+\tau)}\exp(-i\omega_0 t), \qquad w(0,0,t) = \frac{\tau A}{(1+\tau)}\exp(-i\omega_0 t),$$

волнистая черта означает усреднение по времени за период колебаний. Из этой формулы получим следующее выражение:

$$Q_{\text{погл}} = \frac{m\omega_0^3\tau^2A^2}{2\varepsilon(1+\tau)^2}.$$

Величину $Q_{\text{погл}}/q^{(0)}$ обозначим через $\sigma_{\text{погл}}$ и назовем поперечником поглощения резонатора,

$$\sigma_{\text{погл}}=\frac{mk_0\tau^2}{2\varepsilon\rho h(1+\tau)^2}.$$

Введем вспомогательную величину: «поперечник поглощения в отсутствие рассеяния» σ_1, равную отношению поглощаемой мощности $Q_{\text{погл}}$ для «неизгибающейся пластины» ($D=\infty$) к потоку энергии $q^{(0)}$. Она определяется по формуле

$$\sigma_1=\frac{mk_0}{2\varepsilon\rho h}=\sigma_0/\tau.$$

При учете ее формулы для поперечников рассеяния и поглощения можно преобразовать к виду

$$\sigma_{\text{расс}}=\frac{1/\sigma_0}{[(1/\sigma_0)+(1/\sigma_1)]^2},\quad \sigma_{\text{погл}}=\frac{1/\sigma_1}{[(1/\sigma_0)+(1/\sigma_1)]^2}.$$

Эти формулы аналогичны соответственным формулам для сечений рассеяния и поглощения пузырька газа в жидкости [5].

Суммарный поперечник рассеяния и поглощения равен

$$\sigma_{\text{полн}}=\sigma_{\text{расс}}+\sigma_{\text{погл}}=\frac{1}{(1/\sigma_0)+(1/\sigma_1)}.$$

Диссипативные потери всегда уменьшают полный поперечник, т. е. уменьшают полную мощность, забираемую резонатором из падающей волны. При увеличении коэффициента диссипации ε поперечник рассеяния монотонно убывает от σ_0 при $\varepsilon=0$ до нуля при $\varepsilon=\infty$. Поперечник поглощения при этом сначала растет (от нуля при $\varepsilon=0$), достигает максимума при $\varepsilon=mk_0^2/8\rho h$, а затем стремится к нулю при $\varepsilon\to\infty$. При коэффициенте диссипации, равном $mk_0^2/8\rho h$, выполняется соотношение $\sigma_{\text{расс}}=\sigma_{\text{погл}}=\sigma_0/4=\sigma_1/4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клюкин И. И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213–219.
2. *Клюкин И. И., Сергеев Ю. Д.* О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60–65.
3. *Исакович М. А., Кашина В. И., Тютекин В. В.* Волноводная изоляция изгибных волн // Докл. VIII Всесоюз. акуст. конф. Т. 2. Сек. С. М.: АКИН. 1973. С. 113.
4. *Исакович М. А., Кашина В. И., Тютекин В. В.* Способ виброизоляции продольных и изгибных волн в стержнях и пластинах. А. с. 440509 М. кл. *F* 16 *f* 15/00.
5. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16.VI.1986