АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 1

УДК 534.28

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Стадник А. М.

В приближении марковского случайного процесса получены выражения для среднего поля и функции когерентности второго порядка поля волны, распространяющейся в анизотропном параболическом волноводе с пуассоновскими случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости.

В работе [1] в марковском приближении рассмотрены флуктуации параметров волны в изотропном параболическом волноводе с гауссовыми случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости (коэффициента преломления). Такая постановка задачи моделирует распространение акустических волн в океанических волноводных каналах [2, 3], электромагнитных волн в световодах [4] и т. д.

В реальной ситуации различные факторы могут нарушать как изотропность, так и закон убывания диэлектрической проницаемости от оси волновода. Ограничимся изучением статистических характеристик волны, распространяющейся в анизотропном параболическом волноводе, представляющем одну из немногих моделей регулярной составляющей диэлектрической проницаемости, для которых удается точно решить полученные в приближении марковского случайного процесса [5, 6] уравнения для первого и второго моментов волнового поля.

Будем считать, что комплексная амплитуда $u(\mathbf{r})$ волны, распространяющейся в волноводе с крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями, описывается параболическим уравнением

$$\left[\frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2k^2}+\Delta_\perp+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon(\boldsymbol{\rho},z)\right]u(\boldsymbol{\rho},z)=0, \tag{1}$$

где ось oz направлена вдоль оси волновода, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon(\mathbf{r})=1+\Delta\varepsilon(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}=(\boldsymbol{\rho},z)$, $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по поперечным координатам $\boldsymbol{\rho}=(x,y)$.

Для дальнейшего удобно выделить в $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})$ часть, ответственную за формирование собственно волновода: $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})=\varepsilon_0(\boldsymbol{\rho})+\delta\varepsilon(\mathbf{r})$. В принятой модели $\varepsilon_0(\boldsymbol{\rho})=-\sum\limits_{i,k=1}^{2}\alpha_{ik}\rho_i\rho_k$, где α_{ik} — вещественная симметричная положительно определенная (что необходимо для самого факта существования волновода) 2×2 матрица, элементы которой без потери общности можно задать в виде

$$\begin{gathered}\alpha_{11}=\alpha_1^2\cos^2\psi+\alpha_2^2\sin^2\psi,\qquad \alpha_{22}=\alpha_1^2\sin^2\psi+\alpha_2^2\cos^2\psi,\\ \alpha_{12}=\alpha_{21}=(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\sin\psi\cos\psi.\end{gathered} \tag{2}$$

Угол ψ определен при этом с точностью до $\pm\pi$, что несущественно для дальнейшего рассмотрения. Параметризация (2) имеет простой смысл: в штрихованной системе координат, повернутой относительно исходной на угол ψ вокруг оси oz, с координатами

$$x'=x\cos\psi+y\sin\psi,\qquad y'=-x\sin\psi+y\cos\psi, \tag{3}$$

матрица α_{ik} диагональна, а ее собственные значения $\alpha_{1,2}^2>0$ в силу ее положительной определенности.

Флуктуирующую часть диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ будем полагать однородным пуассоновским случайным полем, характеристический функционал которого $\Phi[\lambda]=\exp\{\nu\int d\mathbf{r}[\chi(\int d\mathbf{r}'g_1(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\lambda(\mathbf{r}'))-1]\}$, где $\chi(\mu)$ — характеристическая функция некоторой случайной величины с распределением вероятностей $w(a)$: $\chi(\mu)=\int daw(a)\exp(i\mu a)$.

В приближении марковского случайного процесса уравнения для моментов комплексной амплитуды $u(\mathbf{r})$ являются замкнутыми, если поле $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ — дельта-коррелированное по z, т. е. его кумулянты имеют вид дельта-функций по всем z-аргументам. Легко видеть, что для этого достаточно взять функцию $g_1(\mathbf{r})$ вида $g_1(\mathbf{r})=g(\boldsymbol{\rho})\delta(z)$, что и будем полагать в дальнейшем. Характеристический функционал при этом принимает вид

$$\Phi[\lambda]=\exp\{\nu\int d\boldsymbol{\rho}dz[\chi(\int d\boldsymbol{\rho}'g(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\lambda(\boldsymbol{\rho}',z))-1]\}. \tag{4}$$

Преобразуя уравнение (1) в интегродифференциальное, усредняя его и используя дельта-коррелированность $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ для расцепления средних [5, 6], получим с учетом (4) уравнение для среднего поля:

$$\left[\frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2k^2}\Delta_\perp+\frac{1}{2}\varepsilon_0(\boldsymbol{\rho})+\frac{1}{2}\delta\varepsilon_{\text{эф}}\right]\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle=0, \tag{5}$$

где эффективная диэлектрическая проницаемость не зависит от координат (что обусловлено однородностью случайного поля $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$):

$$\delta\varepsilon_{\text{эф}}=\frac{2\nu}{ik}\int d\boldsymbol{\rho}\left[\chi\left(\frac{k}{2}g(\overline{\boldsymbol{\rho}})\right)-1\right]. \tag{6}$$

Решение (5) имеет вид

$$\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle=u_0(\boldsymbol{\rho},z)\exp\left(\frac{ik}{2}\delta\varepsilon_{\text{эф}}z\right), \tag{7}$$

где функция $u_0(\boldsymbol{\rho},z)$ — решение уравнения (5) в отсутствие неоднородностей (т. е. при $\delta\varepsilon_{\text{эф}}=0$). Легко проверить, что мнимая часть $\delta\varepsilon_{\text{эф}}$ положительна: $\operatorname{Im}\delta\varepsilon_{\text{эф}}=\frac{2\nu}{k}\int d\boldsymbol{\rho}\int daw(a)\sin^2\left[\frac{ka}{4}g(\overline{\boldsymbol{\rho}})\right]>0$, так что формула (7) описывает экспоненциальное затухание когерентной составляющей комплексной амплитуды $u(\mathbf{r})$ в процессе распространения.

Решение $u_0(\boldsymbol{\rho},z)$ для произвольных начальных условий $u_0(\boldsymbol{\rho})=u_0(\boldsymbol{\rho},0)$ можно представить в виде $u_0(\boldsymbol{\rho},z)=\int d\boldsymbol{\rho}_0G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0,z)u_0(\boldsymbol{\rho}_0)$, а для функции Грина $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0,z)$ записать

$$\left[\frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2k^2}\Delta_\perp+\frac{1}{2}\varepsilon_0(\boldsymbol{\rho})\right]G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0,z)=0,\qquad G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0,0)=\delta(\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_0). \tag{8}$$

Для решения задачи (8) удобно перейти в штрихованную систему координат. Переменные x' и y' в уравнении (8) при этом разделяются, а функция Грина факторизуется и представляет собой произведение функций Грина двух независимых одномерных задач (вдоль поперечных осей ox и oy соответственно). Переходя затем обратно в исходную систему координат, получим

$$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0,z)=(\pi i)^{-1}(\det D)^{\frac{1}{2}}\exp\{i[\boldsymbol{\rho}B\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}_0B\boldsymbol{\rho}_0-2\boldsymbol{\rho}D\boldsymbol{\rho}_0]\}.$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}B\boldsymbol{\rho}=\sum_{i,k=1}^{2}\rho_iB_{ik}\rho_k$ и т. д., симметричная 2×2 матрица B_{ik} имеет элементы:

$$B_{11}=B_1\cos^2\psi+B_2\sin^2\psi,\qquad B_{22}=B_1\sin^2\psi+B_2\cos^2\psi,$$
$$B_{12}=B_{21}=(B_1-B_2)\sin\psi\cos\psi, \tag{9}$$

где $B_{1,2}=2^{-1}k\alpha_{1,2}\operatorname{ctg}\alpha_{1,2}z$, а элементы матрицы D_{ik} задаются теми же формулами (9), но с заменой $B_{1,2}\to D_{1,2}=k\alpha_{1,2}(2\sin\alpha_{1,2}z)^{-1}$.

Вообще говоря, формулы (9) задают элементы произвольной матрицы B_{ik} в исходной системе координат, если только она диагональна в штрихованной ($B_{ik}'=B_i\delta_{ik}$), и далее для упрощения записи будем приводить явный вид лишь диагональных элементов.

При $\alpha_{1,2}\to 0$ получаем, как и должно быть, функцию Грина $G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z)$ уравнения (1) для свободного пространства (при $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})=0$):

$$G_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z)=\frac{k}{2\pi iz}\exp\left[\frac{ik}{2z}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)^2\right].$$

Рассмотрим в качестве примера исходный волновой пучок вида $u_0(\boldsymbol{\rho}_0)=u_0\exp(-\rho_0F\rho_0)$, где F_{ik} — симметричная, с положительно определенной вещественной частью 2×2 матрица. После несложных вычислений это дает волновое поле

$$u_0(\boldsymbol{\rho}, z)=u_0\left[\det D(B+iF)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\{\rho\,[iB-D(B-iF)^{-1}D]\,\rho\}. \qquad (10)$$

Из-за громоздкого вида окончательного выражения здесь сохранена матричная форма записи. Для коллимированного пучка матрица F_{ik} вещественна и в общем случае ее можно задать в виде

$$F_{11}=\frac{\cos^2\psi_0}{2a_1^2}+\frac{\sin^2\psi_0}{2a_2^2},\qquad F_{22}=\frac{\sin^2\psi_0}{2a_1^2}+\frac{\cos^2\psi_0}{2a_2^2},$$
$$F_{12}=F_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)\sin\psi_0\cos\psi_0. \qquad (11)$$

Смысл такой параметризации уже разъяснялся выше на примере матрицы α_{ik}. Используя (11), приведем выражение для интенсивности волнового поля (для упрощения записи в штрихованной системе координат (3)):

$$I_0'(\boldsymbol{\rho}', z)=|u_0'(\rho', z)|^2=\frac{|u_0|^2}{g^2(z)}\exp(-\rho'A'\rho'),$$

где

$$A_{11}'=\frac{\frac{1}{a_1^2}(1+d_2^2)\cos^2\varphi+\frac{1}{a_2^2}(1-d_{21}^2)\sin^2\varphi}{d\cos^2\alpha_1z},$$

$$A_{12}'=A_{21}'=\frac{\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_2^2}\right)(1-d_1d_2)\sin\varphi\cos\varphi}{d\cos\alpha_1z\cos\alpha_2z},$$

$$A_{22}'=\frac{\frac{1}{a_2^2}(1+d_1^2)\cos^2\varphi+\frac{1}{a_1^2}(1+d_{12}^2)\sin^2\varphi}{d\cos^2\alpha_2z}, \qquad (12)$$

$$g^2(z)=d^{1/2}\cos\alpha_1z\cos\alpha_2z,$$

$$d=(1-d_1d_2)^2+[(d_1+d_2)\cos^2\varphi+(d_{12}+d_{21})\sin^2\varphi]^2,\qquad \varphi=\psi-\psi_0,$$

$$d_1=(2B_1a_1^2)^{-1},\quad d_2=(2B_2a_2^2)^{-1},\quad d_{12}=(2B_1a_2^2)^{-1},\quad d_{21}=(2B_2a_1^2)^{-1}.$$

Как видно из выражений (12), для того чтобы пучок распространялся с постоянной интенсивностью, необходимо выполнение трех условий согласования (в изотропном случае одного): $\psi_0=\psi$, $k\alpha_1a_1=1$, $k\alpha_2a_2=1$. Распределение поля при этом отличается от начального только набегом базы $u_0(\boldsymbol{\rho}, z)=u_0(\boldsymbol{\rho})\exp[-\frac{i}{2}(\alpha_1+\alpha_2)z]$.

Рассмотренный согласованный гауссов пучок не является единственным типом волны, распространяющейся без изменения амплитуды. Выражения для полного набора мод анизотропного параболического волновода легко записать, воспользовавшись аналогией задачи с квантовомеханическим двумерным уравнением Шредингера для гармонического осциллятора: $u_{n,m}(x, y)=u_n[\sqrt{\alpha_1 k}(x\cos\psi+y\sin\psi)]\cdot u_m[\sqrt{\alpha_2 k}(y\cos\psi-x\sin\psi)]$, $n, m=0, 1, 2, \ldots$, где ортонормированные $\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx u_n(x) u_m(x)=\delta_{nm}\right)$ функции $u_n(x)=N_n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x)$, нормировочный множитель $N_n=[\sqrt{\pi}2^n n!]^{1/2}$, $H_n(x)$ — полиномы Эрмита n-го порядка. Ранее рассмотрен случай $n=m=0$.

Уравнение для функции когерентности второго порядка $\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z)=\langle u(\boldsymbol{\rho}_1, z)u^*(\boldsymbol{\rho}_2, z)\rangle$ получаем аналогичным образом:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}-\frac{i}{2k}(\Delta_{\perp 1}-\Delta_{\perp 2})-\frac{ik}{2}(\varepsilon_0(\boldsymbol{\rho}_1)-\varepsilon_0(\boldsymbol{\rho}_2))+\frac{\pi k^2}{4}H(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)\right]\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z)=0, \tag{13}$$

где в отличие от случая гауссовой статистики случайного поля $\delta\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, z)$ [5]

$$H(\boldsymbol{\rho})=\frac{4\nu}{\pi k^2}\int d\boldsymbol{\rho}'\left[1-\chi\left(\frac{k}{2}g(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho})-\frac{k}{2}g(\boldsymbol{\rho}')\right)\right].$$

Решение уравнения (13) для произвольных начальных условий $\Gamma_0(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)=\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, 0)$ записывается в виде

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z)=\int d\boldsymbol{\rho}_{01}\, d\boldsymbol{\rho}_{02} G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_{01}, \boldsymbol{\rho}_{02}, z)\Gamma_0(\boldsymbol{\rho}_{01}, \boldsymbol{\rho}_{02}), \tag{14}$$

где функция Грина уравнения (13)

$$\begin{gathered} G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_{01}, \boldsymbol{\rho}_{02}, z)=G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_{01}, z)G^*(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_{02}, z)\times \\ \times\exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int\limits_0^z dz' H[T(z')(\rho_1-\rho_2)+T^{(0)}(z')(\rho_{01}-\rho_{02})]\right\}. \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь 2×2 матрицы $T_{ik}(z')$ и $T_{ik}^{(0)}(z')$ диагональны в штрихованной системе координат ($T_i'(z')=T_i(z')\delta_{ik}$ и т. д.), причем

$$T_{1,2}(z')=\frac{\sin\alpha_{1,2}z'}{\sin\alpha_{1,2}z}, \qquad T_{1,2}^{(0)}(z')=\frac{\sin\alpha_{1,2}(z-z')}{\sin\alpha_{1,2}z},$$

а в исходной системе координат, как уже указывалось выше, задаются формулами (9).

Полагая в (14), (15) $\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2=0$, получим изменение средней интенсивности вдоль оси волновода:

$$\langle I(0, z)\rangle=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\frac{\alpha_1\alpha_2}{\sin\alpha_1 z\sin\alpha_2 z}\int d\boldsymbol{\rho}_1\, d\boldsymbol{\rho}_2\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{i\rho_1 B\rho_1-\rho_2 B\rho_2-\frac{\pi k^2}{4}\int\limits_0^z dz' H[T^{(0)}(z')(\rho_1-\rho_2)]\right\}\Gamma_0(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2).$$

Представляют интерес некоторые эффективные параметры, характеризующие ширину пучка, например

$$a_{\text{эф}}^2=\frac{\int d\boldsymbol{\rho}\rho^2\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z)}{\int d\boldsymbol{\rho}\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z)}=\frac{-\Delta_\varkappa W(\boldsymbol{\varkappa}, 0, z)|_{\varkappa=0}}{W(0, 0, 0)},$$

где $W(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\rho}, z)=\int d\mathbf{R}\exp(i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{R})\Gamma\left(\mathbf{R}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \mathbf{R}-\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, z\right)$. Используя (14), (15),

нетрудно получить $a_{эф}^2=a_0^2(z)+a_1^2(z)$, где квадрат эффективного радиуса пучка в отсутствие неоднородностей

$$a_0^2(z)=\frac{-\sum\limits_{i,k=1}^{2} b_{ik}(z)\left.\frac{\partial^2 W(\varkappa,0,0)}{\partial\varkappa_i\,\partial\varkappa_k}\right|_{\varkappa=0}}{W(0,0,0)}$$

(матрица $b_{ik}(z)$ в штрихованной системе координат диагональна, а ее собственные значения $b_{1,2}(z)=\cos^2\alpha_{1,2}z$).

Для расчетов $a_1^2(z)$ достаточно ограничиться квадратичной аппроксимацией функции $H(\boldsymbol{\rho})$: $H(\boldsymbol{\rho})=A(0)\rho^2/\pi l^2$, где $A(\boldsymbol{\rho})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dzB_\varepsilon(\boldsymbol{\rho},z)$, l и $B_\varepsilon(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\langle\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)\delta\varepsilon(\mathbf{r}_2)\rangle$ — соответственно характерный масштаб и корреляционная функция неоднородностей диэлектрической проницаемости. Такая форма $H(\boldsymbol{\rho})$ удобна и для сравнения с результатами работы [7], в которой уширение волнового пучка в изотропном параболическом волноводе рассматривалось на основе уравнения переноса излучения. После несложных, но громоздких вычислений получим

$$a_1^2(z)=\frac{k^2A(0)}{8l^2}\sum_{i,k=1}^{2} D_{ik}^{-2}(z)\int\limits_0^z dz'T_{ik}^{(0)2}(z')=$$

$$=\frac{A(0)z}{4l^2}\left\{\frac{1}{\alpha_1^2}\left[1-\frac{\sin 2\alpha_1 z}{2\alpha_1 z}\right]+\frac{1}{\alpha_2^2}\left[1-\frac{\sin 2\alpha_2 z}{2\alpha_2 z}\right]\right\}.$$

Как и в изотропном случае [7], наличие волновода проявляется лишь на достаточно больших расстояниях. При малых z ($z\ll\min\{\alpha_1^{-1},\alpha_2^{-1}\}$) эффективная площадь пучка, как и в неоднородной среде (при $\alpha_1=\alpha_2=0$), растет пропорционально кубу расстояния, а при $z\gg z_m=\max\times\{\alpha_1^{-1},\alpha_2^{-1}\}$ — благодаря фокусирующему действию волновода — уже только линейно: $a_1^2(z)=A(0)z/4l^2z_m$.

Если в соответствующих формулах устремить определенным образом $\nu\to\infty$, $g(\boldsymbol{\rho})\to 0$, то перейдем от пуассоновской к гауссовской статистике случайного поля $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$. Полагая затем $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ (матрицы B_{ik}, D_{ik}, b_{ik} при этом становятся кратными единичной, что значительно упрощает все вычисления), воспроизведем результаты для изотропного волновода [1, 7].

Полученные результаты позволяют в отличие от работы [1] изучить и случай анизотропных флуктуаций параметров самого волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кляцкин В. И.* К статистической теории распространения волн в параболическом волноводе // Акуст. журн., 1980, Т. 26, № 2, С. 207–213.
2. Акустика океана // Под ред. Бреховских Л. М.– М.: Наука, 1974.
3. Распространение звука и подводная акустика / Под ред. Келлера Дж. Б. и Пападакиса Дж. С.– М.: Мир, 1980.
4. *Маркузе Д.* Оптические волноводы.– М.: Мир, 1974.
5. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля.– М.: Наука, 1978.
6. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.– М.: Наука, 1980.
7. *Воробьев В. В.* Рассеяние светового пучка в среде с регулярной рефракцией // Изв. вузов. Радиофизика, 1971, Т. 14, № 8, С. 1283–1285.

Поступила в редакцию
12.II.1986