Из формулы (5) имеем

$$R=\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho\omega_R^2}\left(1+\frac{P_s}{P_0}\right)}=R_0+\frac{R_0}{2}\frac{P_s}{P_0},$$

R_0 — радиус резонансного пузырька при $P=P_0$. Следовательно, изменение резонансного радиуса пузырька на заданной частоте ω при изменении давления на величину P_s равно

$$\Delta R=\frac{R_0}{2}\frac{P_s}{P_0}. \quad (8)$$

Принимая, что распределение по радиусам пузырьков описывается степенным законом $n(R)=n_0R^{-\varkappa}$, где $\varkappa\approx4$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial R}(R^3n)_{R=R_0}=(3-\varkappa)R_0^2n.$$

Поэтому

$$R^3n=(R^3n)_{P_0}\left(1+\frac{3-\varkappa}{2}\frac{P_s}{P_0}\right) \quad (9)$$

и

$$|\varphi^2(\mathbf{r})|=\frac{\tau(R^3n)\omega}{4r^2\eta_\omega}\left(1+\frac{3-\varkappa}{2}\frac{P_{s0}\sin\Omega t}{P_0}\right). \quad (10)$$

Таким образом, интенсивность рассеянного на пузырьках звука оказывается промодулированной низкочастотным звуковым полем, причем коэффициент модуляции пропорционален показателю степени в функции распределения пузырьков по радиусам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаврилов Л. Ф.* Содержание свободного газа в жидкости и методы его измерения. Физические основы ультразвуковой технологии/Под ред. Розенберга Л. Д. М.: Наука, 1970.
2. *Островский Л. А., Сутин А. М.* Нелинейные акустические методы диагностики газовых пузырьков в жидкости // Ультразвуковая диагностика. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С. 139–161.
3. *Сандлер Б. М., Селивановский Д. А., Соколов А. Ю.* Измерение концентрации газовых пузырьков в приповерхностном слое моря // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 6. С. 1474–1476.
4. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.

Акустический институт
им. А. А. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
2.IX.1986

УДК 534.231–551.81

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Осташев В. Е.

Целью настоящей работы является вывод одного замкнутого уравнения для акустических и гравитационных волн, являющегося точным следствием линеаризованной системы уравнений гидродинамики в стратифицированной движущейся среде. Как известно, ранее не удавалось без дополнительных предположений свести эту систему уравнений к одному замкнутому уравнению. Например, замкнутые уравнения для акустических волн и замкнутые уравнения для гравитационных волн удавалось получить, если в исходной линеаризованной системе уравнений гидродинамики пренебречь соответственно силами плавучести и сжимаемостью среды.

Итак, рассмотрим полную линеаризованную систему уравнений гидродинамики в стратифицированной движущейся среде (см., например, [1]):

$$d\xi/dt+\rho^{-1}dp/dz+g\rho^{-1}\eta=F, \quad (1)$$

$$d\xi_\perp/dt+\xi\mathbf{v}'+\rho^{-1}\nabla p=\mathbf{F}_\perp, \quad (2)$$

$$d\eta/dt+\xi\rho'+\rho d\xi/dz+\rho\nabla\xi_\perp=\rho Q, \quad (3)$$

$$d\sigma/dt+\xi S'=0, \quad (4)$$

$$p-c^2\eta-h\sigma=0;\quad c^2=(\partial P/\partial\rho)_S,\quad h=(\partial P/\partial S)_\rho. \quad (5)$$

В (1)–(5) средними величинами, зависящими от z, являются давление P, скорость движения среды $\mathbf{v}$ (вектор $\mathbf{v}$ лежит в горизонтальной плоскости x, y), энтропия S, скорость звука c, плотность ρ. Величинами, характеризующими акустическую и гравитационную волну, являются колебательные части давления p, вертикальной скорости ξ, горизонтальной скорости $\xi_\perp$, плотности η, энтропии σ. Кроме того в (1)–(5) t – время, $d/dt=\partial/\partial t+\mathbf{v}\nabla$, $\nabla=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$, Q – объемный источник в среде, F и $\mathbf{F}_\perp$ – вертикальная и горизонтальные силы, приложенные к среде, g – ускорение силы тяжести, штрих означает производную по z.

Исключая из (4), (5) σ и учитывая, что $hS'=\rho c^2N^2/g$, где $N^2=-(g^2/c^2+g\rho'/\rho)$ – частота Брента – Вяйсяля, получим

$$d\eta/dt=c^{-2}dp/dt+\rho N^2\xi/g. \tag{6}$$

Отметим, что в произведениях, содержащих операторы d/dt, ∇ и средние величины, сомножители можно менять местами, например $(^d/_{dt})\mathbf{v}=\mathbf{v}\,(^d/_{dt})$, $(^d/_{dt})\rho^{-1}=\rho^{-1}(^d/_{dt})$ и т. д. Используя это свойство, действуя на обе части (1) оператором d/dt и выражая согласно (6) $d\eta/dt$ через p и ξ, получим

$$\frac{d^2\tilde{p}}{dt\,dz}+\left(\frac{d^2}{dt^2}+N^2\right)\tilde{\xi}=\rho\exp\left(\int\limits_0^z g\,dz/c^2\right)\frac{dF}{dt}, \tag{7}$$

где $\tilde{p}=\exp\left(\int\limits_0^z g\,dz/c^2\right)p$, $\tilde{\xi}=\rho\exp\left(\int\limits_0^z g\,dz/c^2\right)\xi$.

Действуя на обе части уравнений (2) и (3) соответственно операторами $\rho\nabla$ и d/dt, вычитая эти уравнения и выражая согласно (6) $d\eta/dt$ через p и ξ, получим второе уравнение, связывающее $\tilde{p}$ и ξ:

$$\left(\Delta-\frac{d^2}{c^2\,dt^2}\right)\tilde{p}+\left(\mathbf{v}'\nabla+2\Gamma\frac{d}{dt}-\frac{d^2}{dt\,dz}\right)\tilde{\xi}=\rho\exp\left(\int\limits_0^z g\,dz/c^2\right)\left(\nabla\mathbf{F}_\perp-\frac{dQ}{dt}\right). \tag{8}$$

Здесь $\Delta=\nabla^2$, $\Gamma=\rho'/2\rho+g/c^2$ – коэффициент Эккарта. Действуя на обе части (7) и (8) соответственно операторами $d^2/dtdz$ и d^2/dt^2+N^2 и складывая (7) и (8), приходим к уравнению, в котором действующий на ξ оператор не содержит d/dz. Действуя этим оператором и оператором d^2/dt^2+N^2 соответственно на уравнение (7) и на уравнение, полученное из (7) и (8), и вычитая эти уравнения, приходим к искомому уравнению:

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{d^2}{dt^2}+N^2\right)^2\left(\frac{d^2}{c^2\,dt^2}-\Delta\right)+\left(2\mathbf{v}'\nabla\frac{d}{dt}+(N^2)'\right)\frac{d^3}{dt^2\,dz}-\right.\\&\left.-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2}{dt^2}+N^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2}-2\Gamma\frac{d}{dz}\right)\right]\exp\left(\int\limits_0^z\frac{g\,dz}{c^2}\right)p=\\&=\rho\exp\left(\int\limits_0^z\frac{g\,dz}{c^2}\right)\left\{\left[\left(\frac{d^2}{dt^2}+N^2\right)\left(\mathbf{v}'\nabla+\frac{g}{c^2}\frac{d}{dt}-\frac{d^2}{dt\,dz}\right)+\right.\right.\\&\left.\left.+2\mathbf{v}'\nabla\frac{d^2}{dt^2}+(N^2)'\frac{d}{dt}\right]\frac{dF}{dt}-\left(\frac{d^2}{dt^2}+N^2\right)^2\left(\nabla\mathbf{F}_\perp-\frac{dQ}{dt}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (9) является дифференциальным уравнением в частных производных шестого порядка по t и $\mathbf{r}=(x,\ y)$ и второго порядка по z. Это уравнение является точным следствием системы (1)–(5). Такое же уравнение (9) справедливо и для многокомпонентной среды с уравнением состояния $P=P(\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n,\ S)$, где ρ_i – плотность i-й компоненты. В этом случае в N, Γ, а также в самом уравнении (9) следует считать $\rho=\sum\limits_{i=1}^n\rho_i$. (Линеаризованная система уравнений гидродинамики в многокомпонентной среде рассматривалась в [2].) Из уравнения (9) можно получить известные в литературе уравнения для акустических волн и уравнения для гравитационных волн. Например, если в (9) положить $N=0$, $g=0$, и считать, что вектор $\mathbf{v}$ не меняет своего направления, то (9) согласуется с уравнением (1.24) работы [3]. Уравнения для гравитационных волн обычно (см., например, [4]) выводят из системы (1)–(5) в приближении несжимаемости среды и в приближении Буссинеска. При выполнении этих двух приближений в уравнении (9) мы должны соответственно положить $c=\infty$ и $\Gamma=0$.

Коэффициенты уравнения (9) зависят только от z. Поэтому, если представить p в виде интеграла Фурье по $\mathbf{r}$ и t, то уравнение (9) можно свести к обыкновенному дифференциальному по z уравнению второго порядка (одномерному уравнению Гельмгольца, полученному другим способом в [5]). Такой подход к вычислению давления в стратифицированной движущейся среде оказывается более удобным по сравнению с непосредственным решением исходной системы (1)–(5), поскольку здесь можно воспользоваться хорошо развитыми точными и приближенными методами решения уравнения Гельмгольца и вычисления интеграла Фурье. Кроме того, использование одномерного уравнения Гельмгольца позволяет обойтись двумя граничными условиями (или условиями излучения). Отметим, что такой подход применялся, например, в работах [2, 5, 6] при вычислении акустического поля в стратифицированной движущейся среде (атмосфере или океане).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Госсард Э., Хук У.* Волны в атмосфере.– М.: Мир 1978. 532 с.
2. *Осташев В. Е.* О звуковом поле точечного источника в стратифицированной движущейся двухкомпонентной среде // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21. № 9. С. 949–955.
3. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
4. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане.– Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
5. *Осташев В. Е.* Волновое описание распространения звука в стратифицированной движущейся атмосфере // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 4. С. 521–526.
6. *Осташев В. Е.* Звуковое поле точечного источника при линейных профилях скорости звука и скорости среднего потока // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 3. С. 346–351.

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
15.XI.1985

УДК 534.2.532

О ДИПОЛЬНОМ ИЗЛУЧЕНИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ «ВСПЛЕСКОВ» В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.

В последние годы в аэро- и гидродинамической акустике оживленно обсуждается вопрос об эффективности вязкостного механизма генерации звука турбулентностью пограничного слоя [1]. В работе [2] обращено внимание на возможность существенного вклада в излучение от организованных структур потока (турбулентных «всплесков») и дана размерностная оценка акустической мощности при малых числах Маха ($M=u_\infty/c\ll1$, u_∞ – скорость свободного течения, c – скорость звука). Ниже приводится численная оценка параметров энергонесущей части спектра излучения «всплесков», основанная на использовании известных экспериментальных данных [3, 4].

Следуя [3, 4], поставим в соответствие турбулентным «всплескам» пристеночный слой вихрей с размерами $b_x\sim100\nu/u_*$, $b_y\sim30\nu/u_*$, $b_z\sim50\nu/u_*$, скоростью сноса $u_c\approx0{,}65u_\infty$ и длиной сноса $l_c\sim\delta$ (оси x и z направлены вдоль и поперек течения, ось y – по нормали к стенке; u_* – динамическая скорость, δ – толщина пограничного слоя). Выражение для дипольной составляющей давления в дальнем поле одного вихря в частотном представлении принимает вид [2, 5]

$$\hat{p}_1(\omega, \mathbf{r}) = \frac{i\omega}{2\pi cr}\sum_{a=x,\,z}\left(\frac{a}{r}\right)\hat{F}_a(\omega)\,e^{i\frac{\omega}{c}r}, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}=(x, y, z)$, F_a – компоненты полной поверхностной силы трения для одного вихря, $\wedge$ – символ фурье-образа: $\hat{p}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\,p\exp(i\omega t)$ и т. п. В [2] найдена связь касательных напряжений поверхностного трения с напряжениями Рейнольдса $T_{xy}=\rho uv$ и $T_{zy}=\rho wv$ в толще пограничного слоя (u, v, w – компоненты возмущений скорости по x, y, z; ρ – плотность среды). Используя эту связь, можно получить следующее выражение для силы F_a в частотном представлении [5]:

$$\hat{F}_a(\omega)=(1-i)\gamma\int\limits_0^\infty \hat{T}_{ay}^{(s)}(\omega, y)\,e^{(i-1)\gamma y}\,dy, \tag{2}$$