верхности [8, 9], для тупого клина существует угол падения $\alpha_Б = \arcsin(k_t/2k_R)$, для которого величина $|R|/\beta$ обращается в нуль (аналогия с углом Брюстера). После прохождения через нуль зависимости $|R|/\beta$ довольно сильно растут и формально стремятся к бесконечности при $\alpha \to 90°$. Последнее обстоятельство отражает тот факт, что выражение (3) не справедливо для углов падения, близких к скользящим, так как при этом $\cos\alpha \to 0$ и ограничиваться первым слагаемым в формуле (2) уже нельзя. Напомним, что пределы применимости выражения (3) по углу β определяются условием $\beta \ll 1$. Практически это означает, что угол β не должен превышать 25–30°.

В целях экспериментальной проверки выражения (3) измерялись угловые зависимости модуля коэффициента отражения $|R|$ для двух алюминиевых клиньев ($\sigma = 0{,}35$) с углами $\beta = 20$ и 40°. Измерения проводились в импульсном режиме (длительность импульса 5 мкс) на частоте 2,1 МГц по методике, описанной в работе [9]. Результаты измерений приведены на фиг. 2 рядом с соответствующей теоретической кривой (для $\sigma = 0{,}35$). Видно, что экспериментальные точки хорошо согласуются с расчетом в случае клина с углом $\beta = 20°$ (или $\theta = 160°$) и, как следовало ожидать, согласуются с теорией лишь качественно для случая $\beta = 40°$ (или $\theta = 140°$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Knopoff L.* Elastic wave propagation in a wedge.– In: Wave propagation in solids/Ed. Miklowitz J. N. Y.: ASME, 1969. P. 3–43.
2. *Крылов В. В., Можаев В. Г.* Отражение и прохождение волн Рэлея в клине // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 6. С. 751–755.
3. *Kane J., Spence J.* Rayleigh wave transmission on elastic wedges // Geophysics. 1963. V. 28. № 5. Pt. 1. P. 715–723.
4. *Yoneyama T., Nishida S.* Further calculation on Rayleigh wave diffraction by elastic wedges // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 59. № 1. P. 206–208.
5. *Крылов В. В.* О волнах Рэлея на гладких поверхностях произвольной формы // // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 5. С. 754–759.
6. *Можаев В. Г.* Применение метода возмущений для расчета характеристик поверхностных волн в анизотропных и изотропных твердых телах с криволинейными границами // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 5. С. 673–678.
7. *Parekh J. P., Tuan H. S.* Reflection and bulk wave conversion of Rayleigh wave at single shallow groove // J. Appl. Phys. 1977. V. 48. № 3. P. 994–1003.
8. *Бирюков С. В., Горышник Л. Л.* Отражение рэлеевской волны от локальных неоднородностей поверхности при наклонном падении // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 461–462.
9. *Королев С. В., Красильников В. А., Крылов В. В.* О существовании угла типа Брюстера для поверхностных волн // Акуст. журн., 1985. Т. 31. № 1. С. 138–140.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
физический факультет

Поступило в редакцию
31.X.1985

УДК 534.231

ПОЛЕ СФЕРИЧЕСКОГО ФОКУСИРУЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ РАСКРЫТИЯ

Левин В. М., Лобкис О. И., Маев Р. Г.

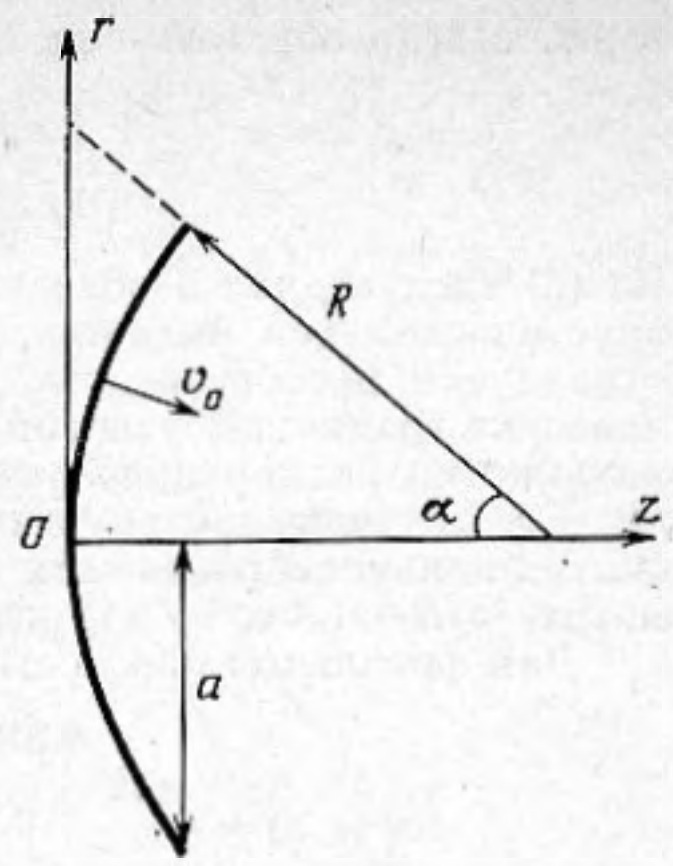
Для расчета сходящихся волновых фронтов в основном используются два метода. При вычислении первым методом [1] интегрирование в интеграле Гельмгольца – Гюйгенса ведется по поверхности волнового фронта. Предполагается, что линейные размеры этой поверхности велики по сравнению с длиной звуковой волны в среде, так что поверхность интегрирования можно представить в виде большого набора практически плоских участков, размеры которых также превосходят длину волны. Результирующее поле представляет собой сумму полей этих плоских участков, излучащих независимо друг от друга. В рамках этого метода О'Нейл [2] получил точное выражение для поля на акустической оси сферического фокусирующего преобразователя, которое справедливо при малом угле раскрытия и большом, по сравнению с длиной волны, линейном размере преобразователя.

Второй метод [3] состоит в том, что для сходящегося фронта вводится плоская поверхность, истинные граничные условия на поверхности преобразователя переводятся в граничные условия в плоскости и поле вычисляется путем интегрирования по плоской поверхности. Преимущество этого метода состоит в том, что для плоскости с заданными на ней потенциалом или колебательной скоростью существует точ-

ное интегральное решение уравнения Гельмгольца, в то время как для незамкнутого сферического фронта такое решение не получено. Пользуясь этим методом, Лукас и Муир [4] получили распределение поля для сферического преобразователя с малым углом раскрытия. Результаты, полученные в [2, 4], в окрестности центра кривизны преобразователя совпадают между собой [5].

При вычислении поля в [2] предполагалось, что волна от каждого плоского участка, на которые разбивается поверхность преобразователя, не дифрагирует на соседних участках. С другой стороны, в [4] малость угла раскрытия предполагалась лишь для удобства расчета. Поэтому для вычисления поля преобразователя с произвольным углом раскрытия воспользуемся методом переноса граничных условий на плоскость.

На фигуре изображен сферический фокусирующий преобразователь с радиусом кривизны R, радиусом a, углом раскрытия α.



Геометрия сферического фокусирующего преобразователя

Нормальная составляющая колебательной скорости на поверхности преобразователя постоянна и равна v_0.

Введем цилиндрические координаты (r, z), где z – координата вдоль акустической оси преобразователя, отсчитываемая от его поверхности, r – координата в плоскости, перпендикулярной акустической оси. Решение первой краевой задачи уравнения Гельмгольца для бесконечной плоскости (с заданным на ней потенциалом колебательной скорости) в цилиндрической системе координат выражается в виде [3]

$$\psi(r, z) = \frac{-ikz}{2\pi} \int_0^\infty \psi(x, 0)\, x\, dx \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\sqrt{z^2+x^2+r^2+2xr\cos\varphi}}}{z^2+x^2+r^2+2xr\cos\varphi} \left(1 + \frac{i}{k\sqrt{z^2+x^2+r^2+2xr\cos\varphi}}\right) d\varphi. \tag{1}$$

Здесь $\psi(r, z)$ – потенциал колебательной скорости в точке (r, z), $\psi(x, 0)$ – потенциал колебательной скорости в плоскости $z=0$, x – координата в этой плоскости, $\sqrt{z^2+x^2+r^2+2xr\cos\varphi}$ – расстояние между точками $(x, 0)$ и (r, z), φ – угол между направлениями на точки x и r в плоскости, перпендикулярной акустической оси, k – волновой вектор в среде.

Переведем истинные граничные условия на преобразователе (колебательная скорость равна v_0 на преобразователе и нулю – вне его) в граничные условия в плоскости $z=0$. Считая, что линейные размеры преобразователя много больше длины звуковой волны в среде, для нахождения поля в этой плоскости можно воспользоваться приближением геометрической акустики. В рамках этого приближения звуковое поле сферического преобразователя совпадает с полем точечного источника, расположенного в его центре кривизны. Потенциал этого поля равен $A \exp(-ik\rho)/\rho$, где ρ – расстояние от центра кривизны преобразователя, A – нормировочный коэффициент, который находится из граничных условий $\partial\psi/\partial\rho = -v_0$ на поверхности преобразователя. В случае $kR \gg 1$ для потенциала в плоскости получаем

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{v_0 R}{ik} \dfrac{e^{ik(R-\sqrt{R^2+x^2})}}{\sqrt{R^2+x^2}} & \text{при} \quad x < R\,\mathrm{tg}\,\alpha, \\ 0 & \text{при} \quad x > R\,\mathrm{tg}\,\alpha. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению поля плоского преобразователя радиуса $R\,\mathrm{tg}\,\alpha$ в бесконечном абсолютно мягком экране с потенциалом, модулированным по фазе и амплитуде.

При $r=0$ подынтегральное выражение в (1) от φ не зависит и потенциал на акустической оси равен

$$\psi(0, z) = -v_0 R z e^{ikR} \int_0^{R\,\mathrm{tg}\,\alpha} \frac{e^{ik(\sqrt{z^2+x^2}-\sqrt{R^2+x^2})}}{(z^2+x^2)\sqrt{R^2+x^2}} \left(1 + \frac{i}{k\sqrt{z^2+x^2}}\right) x\, dx. \tag{3}$$

Замечая, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, получаем

$$\psi(0, z) = \frac{v_0 R}{ik(z-R)} \left\{ \frac{z(z-R)\, e^{ik(\sqrt{z^2+R^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}-R/\cos\alpha+R)}}{\sqrt{z^2+R^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\,(\sqrt{z^2+R^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}-R/\cos\alpha)} - e^{ikz} \right\}. \tag{4}$$

Рассмотрим условия применимости (4). Для выполнения граничных условий необходимо, чтобы предел $\partial\psi/\partial z$ при $z=0$ совпадал с колебательной скоростью на по-

верхности преобразователя. Рассчитав этот предел для выражения (4), получаем

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0} \approx v_0\left(1+\frac{1}{ika}e^{ikR(1+\operatorname{tg}\alpha-1/\cos\alpha)}\right). \tag{5}$$

Из (5) следует, что необходимым условием применимости распределения (4) на всей акустической оси является условие малости длины звуковой волны по сравнению с радиусом преобразователя, в то время как для выражения О'Нейла аналогичная проверка граничных условий требует малости угла раскрытия преобразователя. Ограничение на размер преобразователя, которое следует из (5), связано с использованием геометрической акустики для нахождения поля в плоскости $z=0$. Если вблизи центра кривизны разложить первый член в выражении (4) по степеням малого параметра $|z/R-1|\ll 1$, то (4) переходит в выражения, полученные в [2, 4].

Для фокальной плоскости ($z=R$) при условии $kR\gg 1$ из выражения (1) получаем

$$\psi(r,z)=\frac{v_0R^2}{2\pi}\int\limits_0^{R\operatorname{tg}\alpha}\frac{e^{ik(R-\sqrt{R^2+x^2})}}{\sqrt{R^2+x^2}}x\,dx\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{ik\sqrt{R^2+x^2+r^2+2xr\cos\varphi}}}{R^2+x^2+r^2+2xr\cos\varphi}d\varphi. \tag{6}$$

Рассмотрим поле на малых, по сравнению с размером преобразователя, расстояниях от акустической оси, т. е. для $r\ll R$. В интеграле по φ разложим радикал в фазовом множителе, ограничиваясь линейными членами по r/R, т. е. $\sqrt{R^2+x^2+r^2+2xr\cos\varphi}\approx\approx\sqrt{R^2+x^2}+xr\cos\varphi/\sqrt{R^2+x^2}$, а в амплитудном множителе зависимостью от r пренебрегаем. Воспользовавшись интегральным представлением функции Бесселя, для потенциала в фокальной плоскости получаем выражение, совпадающее с формулой О'Нейла [2], полученной в предположении малости угла раскрытия преобразователя.

Таким образом, наши расчеты показывают, что результаты О'Нейла применимы в окрестности центра кривизны преобразователя с произвольным углом раскрытия и дают неверный результат при удалении от центра кривизны.

Для полусферического преобразователя удобно воспользоваться еще одним представлением решения уравнения Гельмгольца [4]:

$$\psi(r,z)=\int\limits_0^{\infty}e^{iz\sqrt{k^2-s^2}}J_0(rs)\,s\,ds\int\limits_0^{\infty}\psi(x,0)J_0(sx)\,x\,dx \tag{7}$$

(J_0 — функция Бесселя нулевого порядка). Из выражения (2) следует, что для $\alpha=\pi/2$ область «тени» в плоскости $z=0$ отсутствует. Вычисляя в формуле (7) последовательно интегралы по x и s [6], получаем до фокуса ($z<R$)

$$\psi(r,z)=\frac{v_0R}{ik}e^{ikr}\left\{\frac{e^{-ik\sqrt{q^2+r^2}}}{\sqrt{q^2+r^2}}-\frac{1}{\sqrt{q^2+r^2}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon_mJ_{2m}(kr)\left(\frac{r}{\sqrt{q^2+r^2}-q}\right)^{2m}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon_mJ_{2m}(kr)\left(\frac{r}{\sqrt{p^2+r^2}+p}\right)^{2m}\right\}, \tag{8а}$$

за фокусом ($z>R$)

$$\psi(r,z)=\frac{v_0R}{ik}e^{ikr}\left\{-\frac{e^{ik\sqrt{q^2+r^2}}}{\sqrt{q^2+r^2}}+\frac{1}{\sqrt{q^2+r^2}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon_mJ_{2m}(kr)\left(\frac{\sqrt{q^2+r^2}-q}{r}\right)^{2m}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon_mJ_{2m}(kr)\left(\frac{r}{\sqrt{p^2+r^2}+p}\right)^{2m}\right\}, \tag{8б}$$

где $q=z-R$, $p=z+R$, $\sqrt{q^2+r^2}$ — расстояние от центра кривизны, $\varepsilon_m=1$ для $m=0$, $\varepsilon_m=2$ для $m\geqslant 1$, J_{2m} — функции Бесселя.

Структура поля в (8) представляется в виде трех слагаемых: первое из них описывает точечный источник, помещенный в центр кривизны преобразователя (приближение геометрической акустики), второе и третье представляют собой дифракционные поправки. В окрестности центра кривизны преобразователя первое и второе слагаемые сравнимы между собой, что приводит к конечному значению для поля в центре кривизны. Третье слагаемое в (8), которое в выражении (7) описывает затухающие цилиндрические моды с $s>k$, в окрестности центра кривизны много меньше первых двух, при приближении к плоскости $z=0$ третье и второе слагаемые сравнимы между собой, что позволяет удовлетворить граничным условиям (2) в этой плоскости.

Поскольку полученное приближенное решение (1), (2) дает распределение поля в любой точке, имеем возможность проверить выполнение начальных граничных условий и найти распределение колебательной скорости по всей поверхности пре-

образователя, а не в одной точке на акустической оси, как это было сделано ранее в (5). Так как колебательную скорость на поверхности преобразователя с произвольным углом раскрытия можно рассчитать лишь численно, то проведем этот расчет только для полусферического преобразователя ($\alpha=\pi/2$). Нормальная составляющая колебательной скорости на поверхности преобразователя равна

$$v_n(\theta)=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial\psi}{\partial z}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta \tag{9}$$

($\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности преобразователя, θ – уголь наклона $\mathbf{n}$ к акустической оси, $\partial\psi/\partial z$ и $\partial\psi/\partial r$ – аксиальная и радиальная составляющие колебательной скорости на поверхности преобразователя). Подставляя в (9) значение ψ из (8а), для относительного отклонения $\delta(\theta)$ колебательной скорости от истинных граничных условий получаем

$$\delta(\theta)=\frac{v_n(\theta)}{v_0}-1=2ie^{ikR}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{2m+1}J_{2m+1}(kR\sin\theta) \tag{10}$$

(членами порядка $1/kR$ пренебрегаем).

Заметим, что на краю преобразователя граничные условия не выполняются, так как $\delta(\pi/2)=e^{2ikR}-1$, и относительная ошибка по абсолютной величине становится порядка единицы. При $\theta<\pi/2$ ряд быстро сходится, поэтому в (10) можно оставить лишь несколько членов ряда. Учитывая асимптотику функций Бесселя при большом значении аргумента, получаем, что при $\theta<\pi/2$ относительная ошибка становится порядка $1/\sqrt{kR}$. Можно легко показать, что интервал углов $\Delta\theta$, на котором $\delta(\theta)$ изменяется от величины порядка единицы на краю преобразователя до величины порядка $1/\sqrt{kR}$ при $\theta<\pi/2$, также пропорционален $1/\sqrt{kR}$. При $kR\gg1$ граничные условия не удовлетворяются лишь в малом интервале углов $\Delta\theta\sim1/\sqrt{kR}$, вкладом которого можно пренебречь. По-видимому, можно считать, что такие же оценки справедливы и для преобразователя с произвольным углом раскрытия.

Таким образом, получено распределение поля для сферического фокусирующего преобразователя с произвольным углом раскрытия, линейный размер которого превосходит длину звуковой волны в среде. Данное решение справедливо в любой точке пространства, за исключением областей, примыкающих к краям преобразователя.

Авторы благодарят И. Н. Каневского за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Debye P.* Das Verhalten von Lichtwellen im der Nähe eines Brennpunktes oder einen Brennlinie // Ann. Phys., vierte Folge, 1909, V. 30, P. 755–776.
2. *O'Neyl H. T.* Theory of focusing radiators // J. Acoust. Soc. Amer., 1949, V. 21, № 5, P. 516–526.
3. *Рэлей.* Волновая теория света.– М.– Л.: Гостехиздат, 1940.
4. *Lucas B. G., Muir T. G.* Field of a focusing source. // J. Acoust. Soc. Amer., 1982, V. 72, № 4, P. 1289–1295.
5. *Ueda M.* Fast converging series expansion for velocity potential of circular concave piston source // J. Acoust. Soc. Japan (E), 1985, V. 6, № 1, P. 35–39.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции.– М.: Наука, 1983.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
10.III.1986

УДК 535.43:534.26.001.02

РАССЕЯНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ, НОРМАЛЬНО ПАДАЮЩЕЙ НА ПОЛОСТЬ В ВИДЕ ДИСКА В УПРУГОМ ТЕЛЕ

Мартыненко С. В.

Приводится решение осесимметричной динамической задачи, позволяющее найти рассеянное поле при падении плоской продольной волны на дисковую трещину в упругом пространстве. Устраняются неточности, замеченные в предшествующих работах, приводятся численные результаты расчета первых десяти коэффициентов разложения рассеяных волн по сфероидальным функциям для дисков $k_Ta\leqslant5{,}0$, амплитуды рассеяных продольных и поперечных волн вблизи дисковой полости и в ее дальней зоне.

Предметом данной статьи является решение задачи рассеяния упругой монохроматической волны, распространяющейся в бесконечном изотропном упругом теле и встречающей препятствие в виде бесконечно тонкой дискообразной трещины радиусом a в упругом теле.

Данная задача имеет большое значение в ультразвуковой дефектоскопии для