АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 6

УДК 534

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ПРОТЯЖЕННОМ ТЕЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Тэтюхин М. Ю., Федорюк М. В.

Задачи дифракции плоской звуковой волны на протяженных телах с акустически жесткой, мягкой или импедансной границей сведены к одномерным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Проведены численные расчеты.

Рассматривается задача дифракции плоской волны $u_0(\mathbf{r})=\exp(i(\mathbf{k}, \mathbf{r}))$ на теле $\tilde{D}$, граница которого S-гладкая и задана уравнением $r=dF(z/l, \varphi)$, $-l\leqslant z\leqslant l$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, в цилиндрических координатах. Здесь $0<F(t, \varphi)\leqslant 1$ при $|t|\leqslant 1$. Рассеянное поле $u(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)u(\mathbf{r})=0 \tag{1}$$

во внешности $\tilde{D}$ поверхности S одному из краевых условий:

$$\begin{gathered}\text{а)}\ u(\mathbf{r})+u_0(\mathbf{r})|_S=0; \qquad \text{б)}\ \partial/\partial n(u(\mathbf{r})+u_0(\mathbf{r}))|_S=0\\ \text{в)}\ (\partial/\partial n-ikg(z/l, \varphi))(u(\mathbf{r})+u_0(\mathbf{r}))|_S=0\end{gathered} \tag{2}$$

и условию излучения Зоммерфельда. Здесь $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к S, импеданс g — гладкая функция, $\operatorname{Re} g\leqslant 0$. Предполагается, что $kd\cong 1$, $kl\gg 1$, так что $\varepsilon=d/l\ll 1$, и тело $\tilde{D}$ вытянутое. В случае, когда $\tilde{D}$ — тело вращения, эти задачи исследованы в работах [1, 2].

Пусть $u(\mathbf{r})$ удовлетворяет краевому условию (2б) или (2в). Будем искать $u(\mathbf{r})$ в виде волнового потенциала простого слоя

$$u(\mathbf{r})=\Pi_1(\mu)=\iint\limits_S \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mu(\mathbf{r}')\,dS. \tag{3}$$

Функция $\Pi_1(\mu)$ удовлетворяет уравнению (1) и условию излучения. Если тело $\tilde{D}$ — акустически жесткое, то плотность μ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода (см. [3])

$$-2\pi\mu(\mathbf{r})+\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{r}}}\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mu(\mathbf{r}')\,dS=\frac{\partial u_0(\mathbf{r})}{\partial n}, \qquad \mathbf{r}\in S, \tag{4}$$

которое может быть решено только численными методами. При этом возникают следующие существенные трудности. Во-первых, экспонента в подынтегральном выражении быстро осциллирует, так как $kl\gg 1$. Во-вторых, для вычисления интеграла требуются квадратурные формулы высокой степени точности, а они известны только в случаях, когда S — сфера или вытянутый сфероид. Используя асимптотические методы, сведем уравнение (4) к одномерному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, ядро которого не содержит большого параметра kl, и это уравнение можно решать численно с помощью стандартных методов.

Пусть k, θ_0, φ_0 — сферические координаты волнового вектора $\mathbf{k}$. Будем искать неизвестную плотность μ в виде произведения осциллирующей экспоненты на медленно меняющуюся функцию z:

$$\mu=\exp(ikz\cos\theta_0)\nu(z/l, \varphi). \tag{5}$$

Введем обозначения: $r=dr_0$, $r_0=F(z', \varphi)$, $z'=z/l$; тогда получим

$$\Pi_1(\mu)=d\exp(ikz\cos\theta_0)\int_0^{2\pi} I(\nu)\,d\tilde{\varphi},$$

$$I(\nu)=\int_{-1}^{1}\frac{\exp(iklQ)}{R_1}\sqrt{F^2+F_\varphi'^2+\varepsilon^2F^2F_z'^2}\,\nu(t,\tilde{\varphi})\,dt, \tag{6}$$

где $F=F(t, \tilde{\varphi})$, $R_1^2=(t-z')^2+\varepsilon^2[r_0^2+F^2-2r_0F\cos(\tilde{\varphi}-\varphi)]$, $Q=R_1+(t-z')\times\times\cos\theta_0$. Рассмотрим вначале случай, когда $\sin\theta_0\neq0$, так что направление падения плоской волны не совпадает с направлением оси Oz. Используя результаты работы [4], получаем, что на поверхности S

$$\Pi_1(\mu)=\exp(ikz\cos\theta_0)\,\Phi_1(\nu),\qquad \Phi_1(\nu)=\pi id\int_0^{2\pi}H_0^{(1)}\times$$

$$\times(kd\rho\sin\theta_0)\sqrt{\tilde{r}_0^2+\tilde{r}_{0\varphi}'^2}\,\nu(z',\tilde{\varphi})\,d\tilde{\varphi}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\Pi_1(\mu)}{\partial n}=\exp(ikz\cos\theta_0)\,\Phi_2(\nu),$$

$$\Phi_2(\nu)=-\pi ikd\sin\theta_0(r_0^2+r_{0\varphi}'^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}H_1^{(1}(kd\rho\sin\theta_0)\rho^{-1}[r_0^2-r_0\tilde{r}_0\cos(\varphi-\tilde{\varphi})-$$

$$-\tilde{r}_0r_{0\varphi}'\sin(\varphi-\tilde{\varphi})]\sqrt{\tilde{r}_0^2+\tilde{r}_{0\varphi}'^2}\,\nu(z',\tilde{\varphi})\,d\tilde{\varphi}, \tag{8}$$

где $\tilde{r}_0=F(z', \tilde{\varphi})$, $\rho^2=r_0^2+\tilde{r}_0^2-2r_0\tilde{r}_0\cos(\tilde{\varphi}-\varphi)$ и $\partial\Pi_1/\partial n$ — прямое значение нормальной производной потенциала (см. [3]). В этих и последующих формулах отброшены члены порядка $O(\varepsilon)$ и $O((kl)^{-2})$. Из формул (4), (5), (8) получаем

$$-2\pi\nu(z', \varphi)+\Phi_2(\nu)=-ik\sin\theta_0(r_0^2+r_{0\varphi}'^2)^{-1/2}[r_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_{0\varphi}'\sin(\varphi-\varphi_0)]\times$$
$$\times\exp[ikdr_0\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]. \tag{9}$$

Тем самым для функции ν получили семейство одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, зависящих от параметра $z'\in[-1, 1]$ и не содержащих большого параметра kl. Ядро каждого из этих уравнений имеет слабую особенность в точке $\tilde{\varphi}=\varphi$ типа $a(z')\ln|\tilde{\varphi}-\varphi|$ и бесконечно дифференцируемо при $\tilde{\varphi}\neq\varphi$. Если S — поверхность вращения, то уравнение (9) есть уравнение в свертках, которое имеет вид

$$-2\pi\nu(z',\varphi)+\int_0^{2\pi}K(\tilde{\varphi}-\varphi, z,)\,\nu(z',\tilde{\varphi})\,d\tilde{\varphi}=h(z',\varphi),$$

где h — правая часть уравнения (9), и ядро $K(\psi, z')$, 2π — периодично по ψ. Это уравнение решается: разложив ν, h в ряды Фурье $\sum_{-\infty}^{\infty}\nu_n(z')e^{in\varphi}$, $\sum_{-\infty}^{\infty}h_n(z')e^{in\varphi}$, найдем коэффициенты Фурье $\nu_n(z')$, которые явно выражаются через функции Бесселя и Ханкеля первого рода порядка n.

Точно так же выводится интегральное уравнение при импедансном краевом условии (2, *в*):

$$-2\pi\nu(z',\varphi)+\Phi_2(\nu)-ikg(z',\varphi)\Phi_1(\nu)=$$
$$=\left(-\frac{\partial}{\partial n}+ikg(z',\varphi)\right)\exp[i(k_xx+k_yy)]|_S. \qquad (10)$$

Из формул (3), (5) находим амплитуду рассеяния

$$f(\theta,\varphi;\theta_0,\varphi_0)=dl\int_{-1}^{1}dt\int_0^{2\pi}d\tilde\varphi\exp[iklt(\cos\theta_0-\cos\theta)-$$
$$-ik\,dF(t,\tilde\varphi)\sin\theta\cos(\varphi-\tilde\varphi)]\sqrt{F^2(t,\tilde\varphi)+F_\varphi'^2(t,\tilde\varphi)+\varepsilon^2F^2(t,\tilde\varphi)F_z'^2(t,\tilde\varphi)}\,\nu(t,\tilde\varphi). \qquad (11)$$

При $\cos\theta=\cos\theta_0$ быстро осциллирующая экспонента в интеграле (11), содержащая kl, обращается в единицу. Вблизи этих направлений амплитуда рассеяния имеет резкий максимум порядка l. В остальных направлениях f имеет порядок d.

Асимптотические формулы для интеграла $I(\nu)$ справедливы, если точка (r, φ, z) лежит вне некоторых малых окрестностей торцов тела $r=0$, $z=\pm l$. Соответственно уравнения (9), (10) справедливы, если точка z' лежит вне некоторых малых окрестностей точек $z'=\pm1$. Однако сравнение значений амплитуды рассеяния, вычисленных приведенным выше методом, со значениями, вычисленными для вытянутого сфероида с помощью точного решения в работе [5], показывает хорошее совпадение обоих значений. Более подробно об этом будет сказано ниже.

Пусть $\theta_0=0$. В этом случае асимптотические формулы для $\Pi_1(\mu)$ и $\partial/\partial n\ \Pi_1(\mu)$ становятся непригодными, и его приходится исследовать отдельно. Для акустически жесткого тела вращения эта задача была исследована в работе [6]. Применим другой метод. Представим интеграл $I(\nu)$ в виде

$$I(\nu)=\int_{-1}^{1}\exp[ikl(R_1+(1-\delta)(t-z'))]R_1^{-1}\times$$
$$\times\exp[ikl\delta(t-z')]\sqrt{F^2+F_\varphi'^2+\varepsilon^2F_z'^2F^2}\,\nu(t,\tilde\varphi)\,dt,$$

(обозначения те же, что и в формуле (6)), где δ — параметр, $\varepsilon\ll\delta\ll1$. Как показано в работе [4], основной вклад в асимптотику интеграла $I(\nu)$ вносит точка t_0 такая, что $t_0=z'+O(\varepsilon^2)$. Поэтому последняя экспонента равна $1+O(\varepsilon\delta)$ в этой точке, и получаем, что

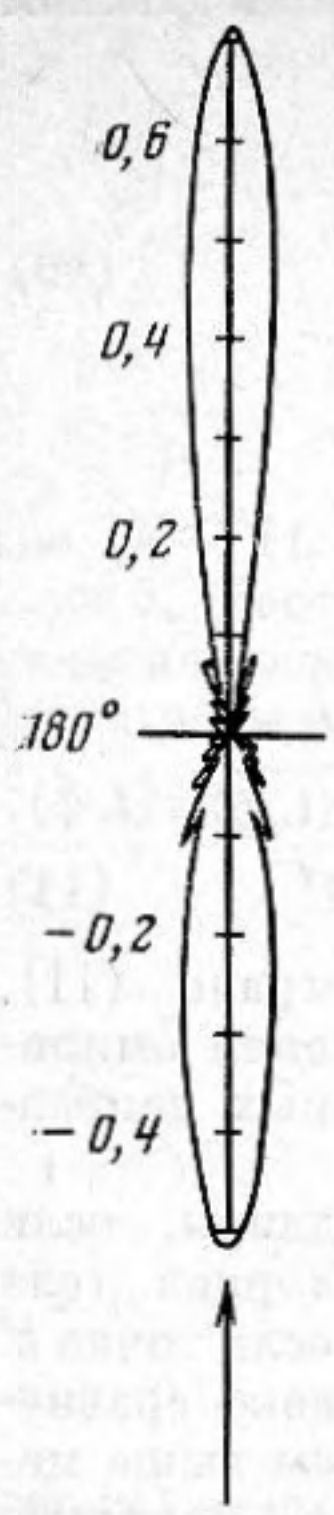
$$I(\nu)=\pi iH_0^{(1)}(kd\rho\sqrt{2\delta-\delta^2})\sqrt{\tilde r_0^2+\tilde r_{0\varphi}'^2}\,\nu(z'\ \tilde\varphi). \qquad (12)$$

Пусть $\tilde D$ — акустически жесткое тело. Будем искать плотность μ в виде

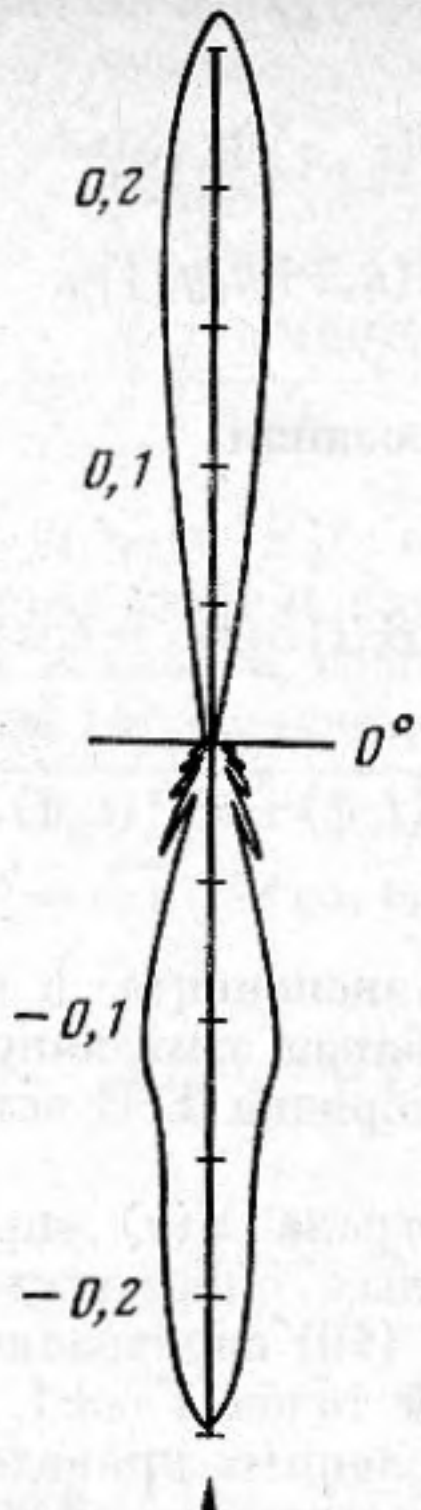
$$\mu=\varepsilon e^{ihz}\nu(z/l,\ \varphi). \qquad (13)$$

Вычисляя асимптотику $\partial\Pi_1(\mu)/\partial n$, получаем интегральное уравнение для функции ν:

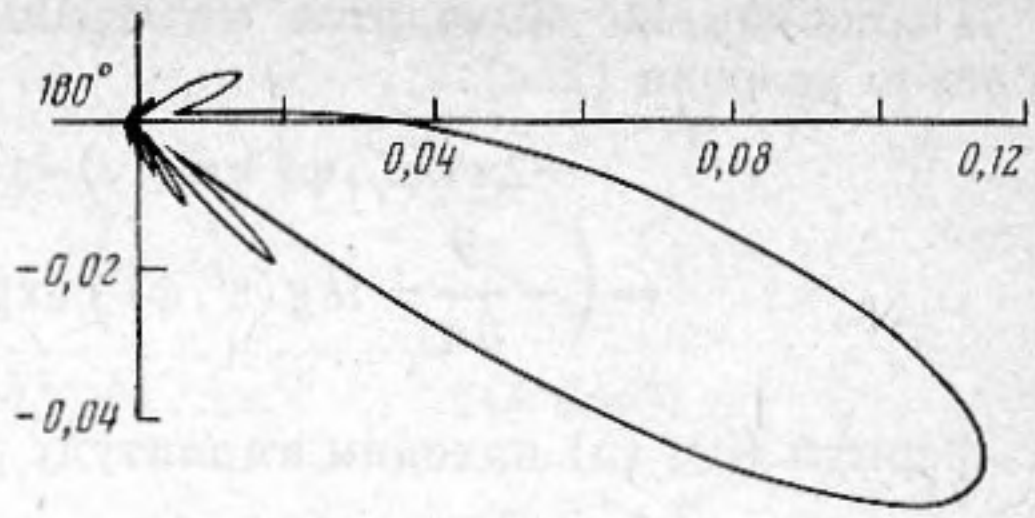
$$2\pi\nu(z',\varphi)+2(r_0^2+r_{0\varphi}'^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^2-r_0\tilde r_0\cos(\varphi-\tilde\varphi)-\tilde r_0r_{0\varphi}'\sin(\varphi-\tilde\varphi)}{\rho^2}\times$$
$$\times\sqrt{\tilde r_0^2+\tilde r_{0\varphi}'^2}\,\nu(z',\tilde\varphi)\,d\tilde\varphi=-\frac{ikr_0r_{0z}'}{\sqrt{r_0^2+r_{0z}'^2}} \qquad (14)$$



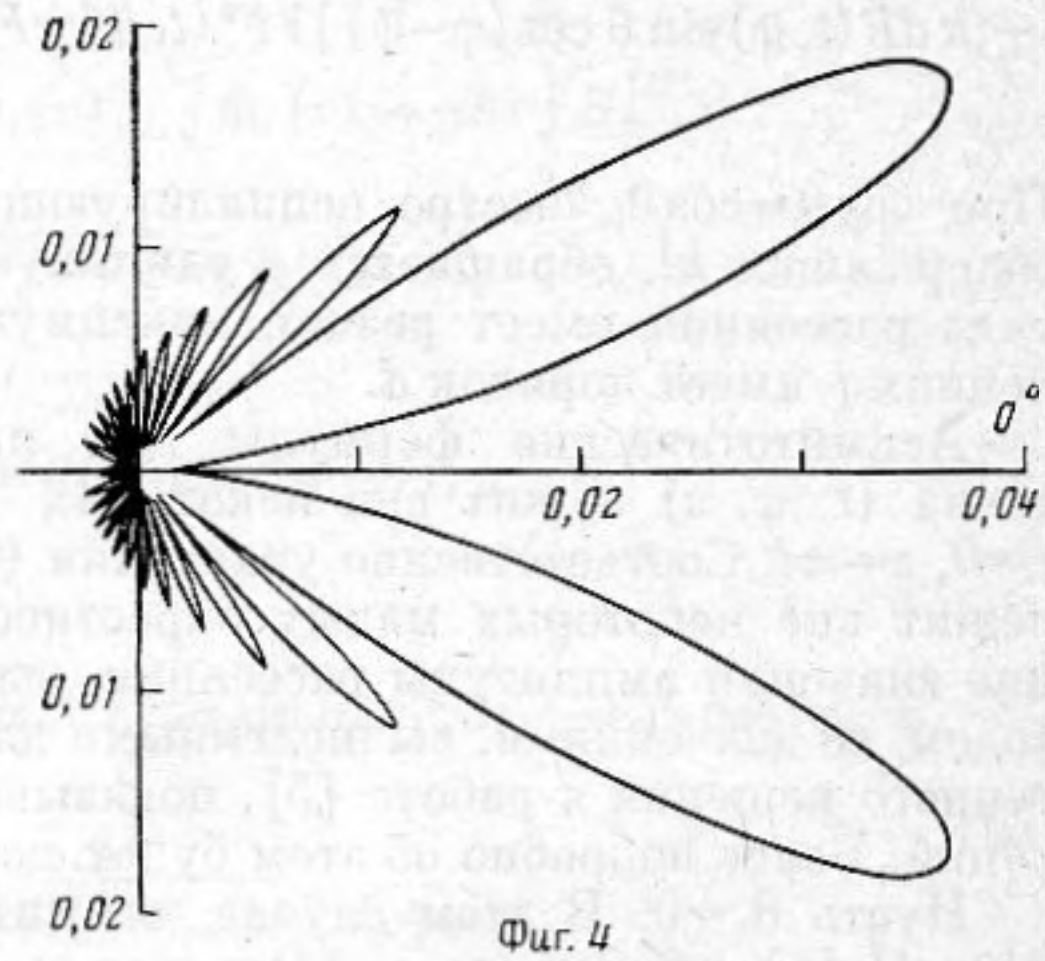
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 1. Диаграмма рассеяния. Сфероид. $kl=20$, $kd=2$, $\theta_0=90°$, $\varphi_0=0°$, $\varphi=0°$, $\alpha=1$

Фиг. 2. Диаграмма рассеяния. Трехосный эллипсоид. $kl=20$, $kd=2$, $\theta_0=90°$, $\varphi_0=0°$, $\varphi=0°$, $\alpha=2$

Фиг. 3. Диаграмма рассеяния. Трехосный эллипсоид. $kl=20$, $kd=2$, $\theta_0=15°$, $\varphi_0=0°$, $\varphi=0°$, $\alpha=2$

Фиг. 4. Диаграмма рассеяния. Трехосный эллипсоид, $kl=20$, $kd=2$, $\theta_0=0°$, $\varphi_0=0°$, $\varphi=0°$, $\alpha=2$

Заметим, что это уравнение можно формально вывести из уравнения (9), если устремить в последнем θ_0 к нулю. Из формул (3), (13) находим амплитуду рассеяния

$$f(\theta,\varphi;0,\varphi_0)=d^2\int\limits_{-1}^{1}dt\int\limits_{0}^{2\pi}d\tilde{\varphi}\exp[iklt(1-\cos\theta)-ikdF(t,\tilde{\varphi})\sin\theta\cos(\varphi-\tilde{\varphi})]\times$$

$$\times\sqrt{F^2(t,\tilde{\varphi})+F_\varphi'^2(t,\tilde{\varphi})+\varepsilon^2F^2(t,\tilde{\varphi})F_z'^2(t,\tilde{\varphi})}\,\nu(t,\tilde{\varphi}).$$

Из сравнения этой формулы с формулой (11) видно, что в данном случае максимум амплитуды рассеяния меньше, чем при $\sin\theta_0\neq0$.

Для акустически мягкого тела (краевое условие (2а)) рассеянное поле будем искать в виде волнового потенциала двойного слоя

$$u(\mathbf{r})=\iint\limits_{S}\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{r}'}}\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mu(\mathbf{r}')\,dS, \tag{15}$$

плотность μ снова возьмем в виде (5). При $\sin\theta_0\neq0$ для функции ν полу-

чим интегральное уравнение

$$2\pi\nu(z',\varphi)-\pi ikd\sin\theta_0\int\limits_0^{2\pi}H_1^{(1)}(kd\rho\sin\theta_0)\rho^{-1}[\tilde r_0^2-\tilde r_0 r_0\cos(\varphi-\tilde\varphi)+$$

$$+r_0\tilde r_{0\varphi}'\sin(\varphi-\tilde\varphi)]\nu(z',\tilde\varphi)\,d\tilde\varphi=-\exp[ikdr_0\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)].$$

Ядро этого уравнения также имеет логарифмическую особенность при $\tilde\varphi=\varphi$. Из формул (5), (15) следует, что амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)=-ikdl\int\limits_0^{2\pi}d\tilde\varphi\int\limits_{-1}^{1}dt\exp[iklt(\cos\theta_0-\cos\theta)-$$

$$-ikdF(t,\tilde\varphi)\sin\theta\cos(\tilde\varphi-\varphi)][\sin\theta(F(t,\tilde\varphi)\cos(\varphi-\tilde\varphi)-$$

$$-F_\varphi'(t,\tilde\varphi)\sin(\varphi-\tilde\varphi))]\nu(t,\tilde\varphi) \qquad (16)$$

и имеет резкий максимум при $\cos\theta=\cos\theta_0$.

Расчеты амплитуды рассеяния по формулам (9), (10), (14) проводились численно на ЭВМ.

Решение уравнения Фредгольма второго рода искалось в виде частичной суммы ряда Фурье для каждого фиксированного z': $\nu(z',\varphi)=\sum\limits_{m=-N}^{N}c_m\exp(im\varphi)$. Далее использовался метод коллокации, приводящий к системе $2N+1$ линейных уравнений с неизвестными c_m. Таким образом, для каждого z' находили значения $\nu(z',\varphi)$ в $2N+1$ точках по φ.

Расчет всех интегралов производился по квадратурным формулам Гаусса с числом узлов, равным $11\div23$, т. е. $N=5\div11$.

На фиг. 1–4 представлены рассчитанные значения $|f(\theta)/l|$ (при фиксированных φ_0, φ, θ_0) для акустически жесткого тела, граница которого задана уравнением $r=d|(1-z^2/l^2)/(\cos^2\varphi+\alpha^2\sin^2\varphi)]^{1/2}$, $\alpha\geqslant1$. В случае $\alpha=1$ (сфероид, фиг 1) такой же результат был получен с помощью точного решения в работе [5]. Если $\alpha=2$, что принято для расчетов, то тело представляет собой трехосный эллипсоид с соотношением осей 20 : 2 : 1.

Авторы выражают благодарность В. В. Тютекину за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федорюк М. В.* Дифракция плоской волны на вытянутом теле вращения.– Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 587–590.
2. *Федорюк М. В.* Рассеяние плоской волны на цилиндрической поверхности с длинным возмущением.– Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985, т. 49, № 1, с. 160–193.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.
4. *Федорюк М. В.* Асимптотика волнового потенциала, сосредоточенного на прямой.– Матем. заметки, 1984, т. 36, № 5, с. 673–679.
5. *Конюхова Н. Б., Пак Т. В.* Дифракция плоской звуковой волны на жестком вытянутом сфероиде. Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
6. *Нурмагомедов А. М., Федорюк М. В.* Рассеяние плоской звуковой волны на теле вращения.– Акуст. журн., 1985, т. 31, № 3, с. 369–373.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.IV.1986