УДК 534.231.1

О ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ

Голубева Е. В.

Распространение поверхностных волн на цилиндрической поверхности исследовалось в работах [1, 2]. Однако рассмотрение ограничивалось случаем распространения волн перпендикулярно образующей цилиндра. В настоящей работе задача обобщается на случай волн, идущих вдоль свободной поверхности бесконечного упругого цилиндра радиуса a по винтовой линии, т. е. по линии, касательные к которой составляют постоянный угол α с образующей цилиндра.

Аналогично [1, 2] будем решать задачу в высокочастотном приближении. Предположим, что волна поверхностная $r\simeq a$, радиус цилиндра велик по сравнению с длиной волны $a\gg\lambda$. Исключим из рассмотрения направления, близкие к направлению образующей $(\sin\alpha\gg 2/(ak_0)$, где k_0 – волновое число). Тогда в расчетах величинами порядка

$$\frac{H}{a}(\sin\alpha)^{-2/3}\sim\frac{(\sin\alpha)^{-2/3}}{k_0 H},\tag{1}$$

где

$$H=\left(\frac{a}{2}\right)^{1/3}k_0^{-2/3}$$

можно пренебречь по сравнению с единицей. Используем цилиндрическую систему координат r, θ, z и будем рассматривать установившиеся гармонические колебания с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, где ω – циклическая частота, t – текущее время.

Введем координату $\bar r=a-r$ и новые переменные

$$\chi=\chi_0+\bar r\sin^{2/3}\alpha/H,\qquad \chi_0=(k_0^2-k_l^2)H^2\sin^{-4/3}\alpha\tag{2}$$

$$\eta=\eta_0+\bar r\sin^{2/3}\alpha/H,\qquad \eta_0=(k_0^2-k_t^2)H^2\sin^{-4/3}\alpha,\tag{3}$$

где k_l и k_t – волновые числа продольных и поперечных волн. На основании свойства градиентной инвариантности [3] получим, что волновые уравнения для скалярного и векторного потенциалов φ, ψ с учетом (1) имеют решения:

$$\varphi=Ar^{-1/2}Ev(\chi),\qquad \psi_r=Br^{-1/2}Ev(\eta),\qquad \psi_\theta=Cr^{-1/2}Ev(\eta),\qquad \psi_r=i\psi_\theta,\tag{4}$$

где $E=\exp(i(ak_0\sin\alpha\theta+k_0\cos\alpha z-\omega t))$, $v(T)$ – функция Эйри, A, B, C – произвольные постоянные.

Из граничных условий, используя (1), получаем дисперсионное уравнение, которое после ряда преобразований записывается в виде

$$\Delta=\Delta_1\Delta_2=0,\tag{5}$$

где

$$\Delta_1=(k_0^2-k_t^2)Hv(\eta_0)-v'(\eta_0)k_0\sin^{5/3}\alpha,$$

$$\Delta_2=\frac{4k_0^2}{H^2}v'(\eta_0)v'(\chi_0)\sin^{4/3}\alpha-(2k_0^2-k_t^2)v(\chi_0)v(\eta_0).$$

Это уравнение имеет решение при двух независимых условиях $\Delta_1=0$ и $\Delta_2=0$, которые определяют два различных типа винтовых волн.

Пусть вначале $k_l^2<k_0^2<k_t^2$ и разность $k_0^2-k_t^2$ мала. Рассмотрим первый тип волн. Уравнение $\Delta_1=0$ можно заменить приближенным уравнением $v'(\eta_0)=0$ с корнями $\eta_0^{(m)}$ $(\eta_0^{(1)}=-1{,}019,\ \eta_0^{(2)}=-3{,}248\ldots)$. При этом порядок приближения η_0 будет $(k_tH)^{-1}$. Зная $\eta_0^{(m)}$, получим неизвестное волновое число, фазовую и групповую скорости m-й нормальной волны:

$$k_{0m}=k_t\left[1+\frac{b}{2}\right],\qquad c_m=c_t\left[1-\frac{b}{2}\right],\qquad c_m^{\text{гр}}=c_t\left[1-\frac{b}{6}\right],\tag{6}$$

где

$b=\eta_0^{(m)}\left(\dfrac{\lambda}{\pi a}\sin^2\alpha\right)^{2/3}$, c_m и $c_m^{\text{гр}}$ растут с увеличением номера m и угла α.

Учитывая, что при $\Delta_1=0$ величины $A=0$, $B=(\operatorname{ctg}\alpha)C$, и включая $\sqrt{r}\simeq\sqrt{a}$ в C, получим выражения для потенциалов и смещений в m-й нормальной волне:

$$\varphi_m=0,\qquad \psi_{zm}=\operatorname{ctg}\alpha v(\eta)CE,\qquad \psi_\theta=Cv(\eta)E,\qquad \psi_r=iCv(\eta)E,\tag{7}$$

$$u_r=0,\qquad u_\theta=-Ck_0\cos\alpha\left(v(\eta)+\frac{v'(\eta)}{k_0H\sin^{1/3}\alpha}\right)E,\tag{8}$$

$$u_z = Ck_0E\left(\sin\alpha\nu(\eta)-\frac{1}{k_0H}\nu'(\eta)\right). \tag{8}$$

Полученные нормальные волны являются поперечными волнами. Их поляризация зависит от α ($u_\theta/u_z\cong-\operatorname{ctg}\alpha$) и незначительно меняется с глубиной. При $\alpha=90°$ волны приобретают горизонтальную поляризацию. Этим нормальным волнам, отходящим от границы под углами наклона γ_m: $\gamma_m^2=-b$, можно поставить в соответствие лучи, распространяющиеся в плоскости, которая составляет угол α с образующей цилиндра, и последовательно отражающиеся от поверхности под углами скольжения γ_m (фиг. 1). Тогда максимальное удаление луча от границы $\bar r_{\max}\simeq-H\eta_0{}^{(m)}\sin^{1/3}\alpha$. С уменьшением α и m угол скольжения γ_m и глубина проникновения $\bar r_{\max}$ также уменьшаются, волна выходит на поверхность.

Рассмотрим теперь второй тип волн. Условие $\Delta_2=0$ в приближении (1) преобразуется к виду $\nu(\eta_0)=0$. Корни $\tilde\eta_0{}^{(m)}$ этого уравнения соответствуют искомой совокупности нормальных волн. Фазовые и групповые скорости этих волн определяются выражениями (6), в которых $\eta_0{}^{(m)}$ нужно заменить на $\tilde\eta_0{}^{(m)}$, потенциалы и смещения с точностью до $(k_tH)^{-2}$ имеют вид

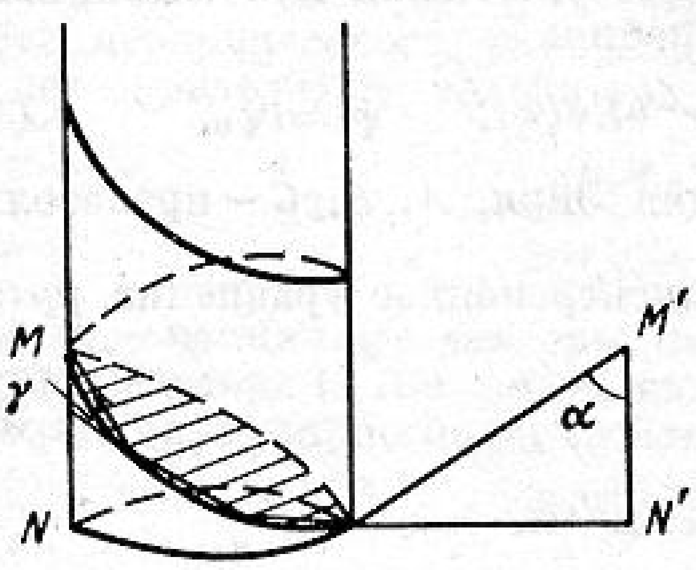
$$\varphi_m=\frac{2iB}{k_tH}\nu'(\tilde\eta_0^{(m)})EQ\sin^{5/3}\alpha,\qquad \psi_{zm}=BE\nu(\tilde\eta^{(m)}),\qquad \psi_{\theta m}=0,\qquad \psi_{rm}=0, \tag{9}$$

$$u_r=EBik_0\sin\alpha\left[\frac{2}{k_t{}^2H}\sqrt{k_t{}^2-k_l{}^2}\,\nu'(\tilde\eta_0^{(m)})Q\sin^{1/3}\alpha+\nu(\tilde\eta^{(m)})\right],$$

$$u_\theta=\frac{EB}{H}\sin^{2/3}\alpha[\nu'(\tilde\eta^{(m)})-2\sin^2\alpha\nu'(\tilde\eta_0^{(m)})Q],\qquad u_z=-\frac{EBQ}{H}\sin^{2/3}\alpha\sin2\alpha\nu'(\tilde\eta_0^{(m)}), \tag{10}$$

где $Q=\exp(-\sqrt{k_t{}^2-k_l{}^2}\bar r)$.

Продольная компонента m-й нормальной волны φ_m убывает по экспоненте с увеличением $\bar r$ и быстро затухает при удалении от границы. При этом волна становится практически сдвиговой. Из (10) следует, что u_z уменьшается с глубиной быстрее, чем u_θ, и поэтому направление тангенциальной составляющей вектора смещения $\mathbf{u}_\tau=u_z\mathbf{z}+u_\theta\boldsymbol\theta$ меняется по мере удаления от границы и изменения угла так, что



$$\mathbf{k}_0\mathbf{u}_\tau=\begin{cases}90+\alpha & r=a\\ 90-\alpha & r\to0\end{cases}.$$

При этом плоскость поляризации волны вращается в зависимости от глубины и угла α. u_r смещено по фазе относительно u_θ и u_z на $\pi/2$. Поэтому движение частиц среды происходит по эллипсу, параметры которого зависят от α и значительно меняются с глубиной. Волна является поверхностной с глубиной проникновения $\sim H\tilde\eta_0{}^{(m)}\sin^{1/3}\alpha$. С уменьшением номера m и угла α волна стремится к поверхности. При $\alpha=90°$ этот тип нормальных волн переходит в волны с вертикальной поляризацией [1].

Пусть теперь $k_0{}^2>k_t{}^2$, $k_0{}^2-k_t{}^2\sim k_t{}^2$. Тогда $k_0{}^2-k_l{}^2\sim k_t{}^2$ и $\eta_0\sim\chi_0\sim(k_0a)^{2/3}\gg1$. Преобразуя (5), получим, что при любых $k_0{}^2>k_t{}^2$ $\Delta_1\neq0$, т. е. волны первого типа отсутствуют, а Δ_2 приводится к известному уравнению Рэлея для плоской границы [2]. При этом смещения в волне зависят от угла α, а скорость распространения волны в приближении (1) от α не зависит.

Аналогично [1, 2] значения k_0 далекие от k_t здесь не рассматривались. Так как при этом η_0 возрастает, глубина проникновения волны становится $\sim a/2$ и концентрации энергии у поверхности не происходит.

В заключение выражаю благодарность В. В. Тютекину за помощь и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы.– Акуст. журн., 1967, т. 13, № 4, с. 541–554.
2. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
3. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-тер., 1958.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
19.IX.1985