УДК 534.24

# КВАДРАТИЧНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАССЕЯНИИ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ВЫСТУПОМ

*Бирюков С.В.*

Расчет рабочих характеристик устройств обработки сигналов на рэлеевских волнах с отражательными решетками в виде групп прямоугольных канавок или выступов требует учета квадратичных эффектов по отношению $\varepsilon=h/\lambda$, где $h$ – высота неоднородностей, $\lambda$ – длина рэлеевской волны. Экспериментальные и численные исследования [1–3] показывают, что эти эффекты приводят к сдвигу резонансной частоты и обусловливают отражение на ее второй гармонике. В данной работе получены аналитические выражения для квадратичных поправок к параметрам рассеяния.

Пусть изотропное упругое полупространство занимает область $z<0$, а на его поверхности расположен выступ из того же материала, занимающий область $0\leqslant z\leqslant h$, $-a\leqslant x\leqslant a$, $-\infty<y<\infty$. Рассмотрим рассеяние этим выступом плоской рэлеевской волны с полем смещений в плоскости $z=0$ равным $\mathbf{u}^0(x)=\mathbf{u}^0\exp(ipx-i\omega t)$, где $p=2\pi/\lambda$, $\omega$ – частота, $t$ – время, $\mathbf{u}^0$ – двумерный амплитудный вектор.

Однородное $z<0$ и неоднородное $z>0$ полупространства можно охарактеризовать матрицами поверхностных импедансов $\hat\zeta(\varkappa)$ и $\hat\zeta(\varkappa, q)$ [4], линейно связывающими при $z=0$ трансформанты Фурье по координате $x$ вектора смещений $\mathbf{u}(\varkappa)$ и нормальных компонент тензора упругих напряжений. Из непрерывности этих компонент следует при $z=0$ уравнение для смещений [4]

$$\hat\zeta(\varkappa)\mathbf{u}(\varkappa)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat\zeta(\varkappa,q)\mathbf{u}(q)\,dq, \tag{1}$$

где матрицу $\hat\zeta(\varkappa, q)$ определим ниже, а известная [5–6] матрица $\hat\zeta(\varkappa)$ имеет вид

$$\hat\zeta(\varkappa)=\frac{\mu}{g(\varkappa)}\begin{bmatrix} k_t^2(\varkappa^2-\alpha k_t^2)^{1/2} & -i\varkappa[k_t^2+2g(\varkappa)] \\ i\varkappa[k_t^2+2g(\varkappa)] & k_t^2(\varkappa^2-k_t^2)^{1/2}\end{bmatrix}.$$

Здесь $g(\varkappa)=(\varkappa^2-k_t^2)^{1/2}(\varkappa^2-\alpha k_t^2)^{1/2}-\varkappa^2$, $k_t=\omega/c_t$, $\alpha=(c_t/c_l)^2$, а $\mu$, $c_t$ и $c_l$ – соответственно параметр Ламе и скорости объемных поперечных и продольных волн.

Представим полное поле смещений в (1) в виде суммы падающего и рассеянного $\mathbf{u}^s$ полей. Чтобы вычислить рассеянное поле с учетом квадратичных по $\varepsilon$ членов, необходимо выполнить две итерации в (1), что приводит к формальному выражению для рассеянного поля

$$\mathbf{u}^s(\varkappa)=-\hat\zeta^{-1}(\varkappa)\left[\hat\zeta(\varkappa,p)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat\zeta(\varkappa,q)\hat\zeta^{-1}(q)\hat\zeta(q,p)\,dq\right]\mathbf{u}^0. \tag{2}$$

Для вычисления $\hat\zeta(\varkappa, q)$ воспользуемся выведенным в работе [4] уравнением для матрицы поверхностного импеданса неоднородной упругой среды как функции координаты $z$, которое в случае прямоугольного выступа принимает вид

$$\frac{d\hat\zeta(\varkappa,q,z)}{dz}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat\zeta(\varkappa,\varkappa',z)\hat A\hat\zeta(\varkappa',q,z)\,d\varkappa'+\hat S(\varkappa)\hat\zeta(\varkappa,q,z)+\hat\zeta(\varkappa,q,z)\hat T(q)+$$

$$+\hat\Phi(\varkappa,q)I(\varkappa-q)=0,\qquad 0\leqslant z\leqslant h,$$

с начальным условием $\hat\zeta(\varkappa, q, h)=0$, где $I(\varkappa)=\dfrac{\sin a\varkappa}{\pi\varkappa}$,

$$\hat\Phi(\varkappa,q)=\mu\begin{bmatrix} k_t^2-4(1-\alpha)\varkappa q & 0 \\ 0 & k_t^2\end{bmatrix},\qquad \hat T(q)=-iq\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-2\alpha & 0\end{bmatrix},$$

$$\hat S(\varkappa)=i\varkappa\begin{bmatrix} 0 & 1-2\alpha \\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \hat A=\frac{1}{\mu}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha\end{bmatrix}.$$

Это уравнение можно переписать в интегральной форме

$$\hat\zeta(\varkappa,q,z)=\int\limits_{z}^{h}e^{\hat S(\varkappa)(z'-z)}\left[\hat\Phi(\varkappa,q)I(\varkappa-q)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat\zeta(\varkappa,\varkappa',z')\hat A\hat\zeta(\varkappa',q,z')\,d\varkappa'\right]e^{\hat T(q)(z'-z)}\,dz', \tag{3}$$

что позволяет развить итерационную процедуру определения импеданса $\hat{\zeta}(\varkappa, q) = \hat{\zeta}(\varkappa, q, 0)$. При $h=0$ из (3) следует очевидное равенство $\hat{\zeta}(\varkappa, q, 0)=0$, а последующие две итерации приводят к выражению

$$\hat{\zeta}(\varkappa, q) = \hat{\zeta}_1(\varkappa, q, 0) + \int\limits_0^h e^{\hat{S}(\varkappa)z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}_1(\varkappa, \varkappa', z) \hat{A} \hat{\zeta}_1(\varkappa', q, z)\, d\varkappa'\, e^{\hat{T}(q)z}\, dz, \tag{4}$$

где

$$\hat{\zeta}_1(\varkappa, q, z) = \int\limits_0^{h-z} e^{\hat{S}(\varkappa)z'} \hat{\Phi}(\varkappa, q) I(\varkappa - q) e^{\hat{T}(q)z'}\, dz'. \tag{5}$$

Подставим выражение для импеданса (4) в (2), при этом чтобы не превышать требуемую точность расчетов, в интегральный член в (2) достаточно подставить лишь первый член выражения (4). В результате получим выражение для рассеянного поля в замкнутом виде. Важно отметить, что полученный в результате такой подстановки интеграл в (2) будет сходящимся, в отличие от логарифмически расходящегося интеграла, который неизбежно появляется в стандартном методе возмущений [7], когда поля и импеданс, описывающий влияние неоднородности в виде прямоугольного выступа, ищутся в виде ряда по степеням $h$. Такое разложение в нашей теории эквивалентно формальному переходу к пределу $h \to 0$ под знаком интеграла в (2). Так, при $h \to 0$ из (5) следует выражение $\zeta_1(\varkappa, q, 0) = h\hat{\Phi}(\varkappa, q) I(\varkappa - q)$, которое пригодно лишь для вычисления борновского приближения (первый член в (2)), а его подстановка во второй части (2) приводит к расходящемуся интегралу.

Взяв обратное преобразование Фурье от выражения (2) и определяя с помощью теоремы о вычетах выражение для полей рассеянных рэлеевских волн в дальней зоне [6], можно найти затем и его асимптотику при $\varepsilon \to 0$ и $h/a \to 0$. В результате для коэффициентов прохождения $\tau$ и отражения $R$ рэлеевской волны по амплитуде получаем выражения $\tau = 1 - 2r^2 \sin^2 2ap - w/2 + iB$, $R = -i[2r \sin 2ap - B \cos 2ap]$, форма которых соответствует эмпирической модели, предложенной в [1]. Здесь $r = \varepsilon c_1$ и $w \sim \varepsilon^2$ – известные коэффициенты отражения от переднего края выступа и трансформации энергии падающей на выступ рэлеевской волны в энергию объемных волн [6], а величина $B = \varepsilon^2 c_2(\varepsilon)$, где $c_2(\varepsilon) = -d \ln \varepsilon$, определяет фазовую задержку рэлеевской волны и коэффициент отражения на второй гармонике. Необходимые для практических расчетов коэффициенты $c_1$ и $d$ имеют простой вид

$$c_1 = \frac{\pi\eta\sqrt{1-\eta}}{\Delta'(\eta)}, \qquad d = \frac{32\pi(1-\alpha)\sqrt{1-\eta}}{\Delta'(\eta)},$$

где $\eta$ – корень уравнения Рэлея $\Delta(\eta) = (2-\eta)^2 - 4\sqrt{1-\eta}\,\sqrt{1-\alpha\eta} = 0$, и зависят только от коэффициента Пуассона $\nu$, плавно меняясь от 0,844 до 0,185 и от 17,7 до 6,47 соответственно при изменении $\nu$ от 0 до 0,5.

Таким образом, анализ показывает, что старший член асимптотики величины $B$ имеет вид $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$, а не $\varepsilon^2$, как априори предполагалось ранее в экспериментальных работах. Полученное выражение находится в хорошем соответствии с результатами этих же работ, сводка которых приведена в [2]. Так, параболическая аппроксимация сильно разбросанных экспериментальных значений $B$ для сред с $\nu = 0{,}34$ и $\nu = 0{,}41$ приводит к эмпирическим величинам $c_2 = 42$ и $c_2 = 34$. Для таких сред $d = 9{,}44$ и $d = 8{,}05$ соответственно, а расчетная величина $c_2(\varepsilon)$ меняется от 43,5 до 36,9 и от 37,1 до 31,5 при характерном изменении $\varepsilon$ от 0,01 до 0,02, что находится в пределах ошибок измерения и практически точно соответствует численным результатам работы [3].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Li R. C. M., Melngailis J.* The influence of stored energy at step discontinuities on the behavior of surface-wave gratings.– IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, 1975, v. SU-22, № 3, p. 189–198.
2. *Shimizu H., Takeuchi M.* Theoretical studies of the energy storage effects and the second harmonic responses of SAW reflection gratings.– IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings. New Orleans, 1979, p. 667–672.
3. *Datta S., Hunsinger B. J.* A theoretical analysis of stored energy in surface wave gratings.– IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings. New Orleans, 1979, p. 673–677.
4. *Бирюков С. В.* Уравнение для поверхностного импеданса неоднородной упругой среды.– Акуст. журн., 1985, т. 31, № 3, с. 296–302.
5. *Бирюков С. В.* Аналоги углов Брюстера для упругих поверхностных волн.– Письма в ЖТФ, 1983, т. 9, № 4, с. 222–226.
6. *Бирюков С. В.* Рассеяние рэлеевских волн двумерными неровностями поверхности при наклонном падении.– Акуст. журн., 1980, т. 26, № 4, с. 494–501.
7. *Крылов В. В.* Распространение и рассеяние волн Рэлея в средах с неоднородными границами: Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1980.



Поступило в редакцию
3.IX.1985