

ИМПЕДАНСНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В УПРУГО-ЖИДКОСТНЫХ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Безруков А. В., Приходько В. Ю., Тютюкин В. В.

Рассматривается плоский волновод, занимающий в декартовой системе координат (x_1, x_2) область $W: \{-\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq R\}$, заполненную акустической средой с плотностью ρ , скоростью звука c , зависящими от поперечной координаты x_2 . Предполагается, что нижняя граница волновода $x_2=0$ является поверхностью твердого неоднородного полупространства, моделируемого системой «неоднородный твердый слой на однородном твердом полупространстве». Неоднородный слой имеет плотность материала $\rho_1(x_2)$, продольную $c_{l1}(x_2)$ и сдвиговую $c_{t1}(x_2)$ скорости, толщину h_1 . Продольная и сдвиговая скорости c_{l2} и c_{t2} в полупространстве $x_2 < -R_1$ и плотность материала ρ_2 — постоянны. Верхняя граница волновода $x_2=R$ — абсолютно жесткая.

Приведем основные уравнения, дающие постановку задачи и ее решение, основанные на импедансном методе [1–3].

Пусть волновой процесс в акустической среде описывается уравнениями движения Эйлера и уравнением неразрывности

$$\text{grad } p + \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{g}, \quad \text{div } \mathbf{V} + \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = f, \quad (1)$$

где p — звуковое давление, \mathbf{V} — колебательная скорость, \mathbf{g} и f — функции источников звукового давления и скорости. Характеристический импеданс Z и импеданс нагрузки Z_r запишем в виде

$$\hat{p} = Z \hat{U}_{x_2} + Z_r, \quad \hat{U}_{x_2} = \frac{i}{\omega} \hat{V}_{x_2}. \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем «крышкой» обозначаются фурье-трансформанты от соответствующих функций, получаемые преобразованием Фурье по координате x_1 .

Нелинейное уравнение Риккати для Z и линейное дифференциальное уравнение для Z_r можно получить прямой подстановкой трансформант Фурье (2) в (1):

$$Z' + \kappa Z^2 - \omega^2 \rho = 0, \quad (3)$$

$$Z_r' + \kappa Z Z_r - \hat{g}_{x_2} - \left(\hat{f} + \frac{\beta}{\omega \rho} \hat{g}_{x_1} \right) \frac{Z}{i\omega} = 0, \quad (4)$$

где $\kappa = \beta^2 / (\omega^2 \rho) - 1 / (\rho c^2)$, β — спектральный параметр.

Таким же образом получаются уравнения для \hat{p} и \hat{U}

$$\hat{p}' - \omega^2 \rho \hat{p} / Z + \omega^2 \rho Z_r / Z - \hat{g}_{x_2} = 0, \quad (5)$$

$$\hat{U}_{x_2}' - \kappa (Z \hat{U}_{x_2} + Z_r) + (\hat{f} + \beta \hat{g}_{x_1} / (\omega \rho)) / (i\omega) = 0. \quad (6)$$

Аналогичные системы уравнений для тензора импедансов, вектора нормальных напряжений и смещений получаются для области $x_2 < 0$ в твердом полупространстве [1–2]. Отметим, что при отсутствии источников $f=0$, $\mathbf{g}=0$ следует, что импеданс нагрузки $Z_r=0$. В этом случае имеем однородную краевую задачу на собственные значения, которая сводится к задачам Коши для уравнений первого порядка (3)–(6) с начальными условиями, определяемыми из требований непрерывности тензора импедансов на границах контакта неоднородного слоя с полупространством

$$Z^{(s)}(-h_1, \beta) = Z^{(p)}(\beta), \quad (7)$$

где $Z^{(s)}$ — тензор импедансов твердого слоя, удовлетворяющий матричному уравнению Риккати [1–2]; $Z^{(p)}$ — характеристический тензор импедансов твердого полупространства [1]. На границе раздела акустической и твердой сред выполняется соотношение

$$Z(0) = -\det \| Z^{(s)}(0, \beta) \| / z_{11}^{(s)}(0, \beta). \quad (8)$$

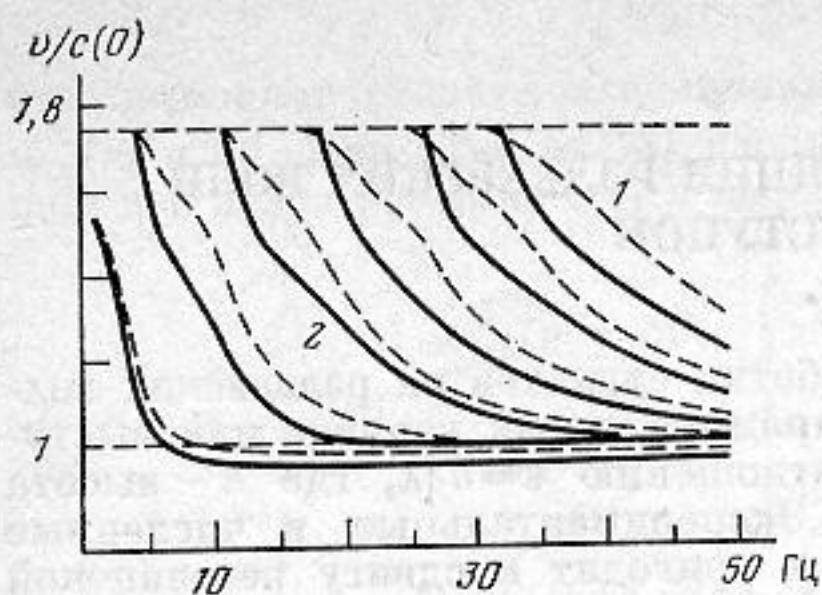
Спектральный параметр β определяется таким образом, чтобы решение задачи Коши (3), (8) удовлетворяло условию $Z(h)=0$. В частности, при $h \rightarrow 0$ получаем дисперсионное уравнение для волны рэлеевского типа в неоднородном твердом полупространстве

$$\det \| Z^{(s)}(0, \beta) \| = 0, \quad (9)$$

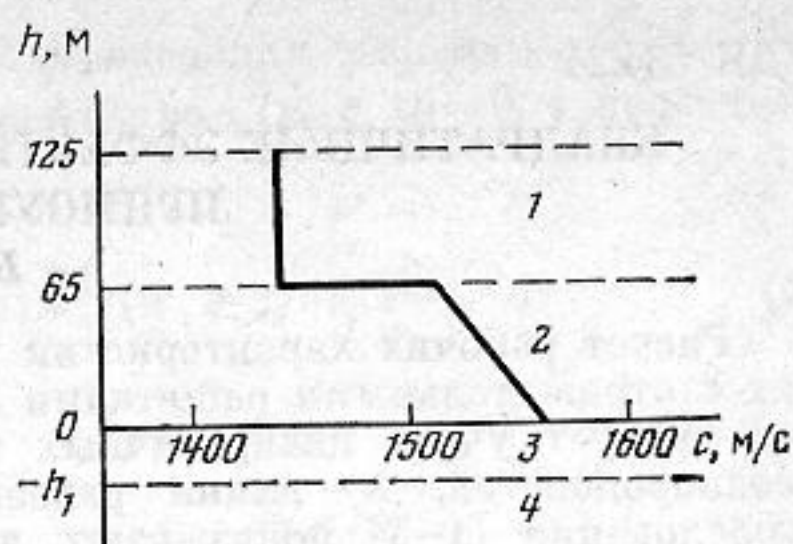
а при условии $h \rightarrow 0$, $h_1 \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение в однородном полупространстве

$$\det \| Z^{(p)}(\beta) \| = 0. \quad (10)$$

Кроме того, при условии, что скорость звука и плотность постоянны и $h \rightarrow 0$, полу-



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Графики фазовых скоростей первых шести нормальных волн в модели мелкого моря: 1 — случай однородного твердого полупространства, принятого в качестве дна с параметрами: $\rho_2=3 \times 10^3$ кг/м³, $c_{t_2}=4350$ м/с, $c_{l_2}=2718$ м/с; 2 — наличие неоднородного слоя толщины $kh_1=4$, в котором коэффициент Ляме μ_1 линейно убывает в 2 раза

Фиг. 2. Профиль скоростей звука в модели. Зона 1 — $\rho=1 \times 10^3$ кг/м³, $c=1436,93$ м/с, 2 — $\rho=1,4 \times 10^3$ кг/м³, c — линейно убывает от значения, равного 1562 м/с на границе жидкость — твердое дно до 1512 м/с на расстоянии $H=65$ м от дна; 3 — неоднородный твердый слой; 4 — однородное твердое полупространство

чаем дисперсионное уравнение для волн типа Стоунли на границе однородного акустического полупространства и неоднородного твердого полупространства

$$\det \| Z^{(s)}(0, \beta) \| + z_{11}^{(*)}(0, \beta) \sqrt{\rho \omega^2 / \kappa} = 0. \quad (11)$$

Отметим, что во всех полученных задачах Коши в отличие от уравнений Гельмгольца и Ляме для неоднородных сред не содержатся производные от функций плотности и скоростей по координатам. Это позволяет эффективно использовать метод для сред, описываемых материальными функциями с разрывами первого рода.

Задачи Коши типа (3), (8) широко используются в различных вариантах дифференциальных ортогональных прогонок [4]. Один из распространенных устойчивых методов интегрирования таких задач получается при подстановке в (3) функции $Z = \operatorname{tg} \mathcal{F}$ (подстановка Прюффера), что позволяет избежать трудностей, связанных с неограниченным ростом Z в узлах функций смещений и получить удобное для интегрирования уравнение

$$\mathcal{F}' + \kappa \sin^2 \mathcal{F} - \omega^2 \rho \cos^2 \mathcal{F} = 0. \quad (12)$$

Матричное уравнение Риккати для тензора импедансов, описывающего неоднородное твердое полупространство, интегрируется при помощи преобразования Кэли [4]

$$\mathcal{F}^{(s)} = (\alpha Z^{(s)} + iE)^{-1} (iE - \alpha Z^{(s)}), \quad (13)$$

где E — единичная матрица, α — нормировочный множитель. Для унитарной матрицы $\mathcal{F}^{(s)}$ получена система уравнений Риккати

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(s)'} + i [(\mathcal{F}^{(s)} - E) \Lambda (E - \mathcal{F}^{(s)}) - i (\mathcal{F}^{(s)} - E) Q (\mathcal{F}^{(s)} + E) + \\ + i (\mathcal{F}^{(s)} + E) S (E - \mathcal{F}^{(s)}) + (\mathcal{F}^{(s)} + E) P (\mathcal{F}^{(s)} + E)] / 2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Матрицы Λ , Q , S и P приведены в работе [2].

На фиг. 1 приведены результаты расчетов фазовых скоростей первых шести мод акустического волновода, являющегося моделью мелкого моря [5]. Профиль скоростей звука данного волновода представлен на фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мачевариани М. М., Тютюкин В. В., Шкварников А. П. Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред. — Акуст. журн., 1971, т. 17, № 1, с. 97–102.
2. Тютюкин В. В. Нормальные волны твердых слоисто-неоднородных волноводов. — Акуст. журн., 1984, т. 30, № 3, с. 373–379.
3. Краснушкин П. Е. Метод пересчета импеданса в задачах о волнах в упругих средах. — Докл. АН СССР, 1980, 252, № 2, с. 332–335.
4. Лидский В. В., Нейгауз М. Г. К методу прогонок в случае самосопряженной системы второго порядка. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1, с. 161–165.
5. Агеева Н. С., Крупин В. Д. Некоторые особенности затухания мод в мелком море с трехслойным поглощающим дном. — Акуст. журн., 1985, т. 31, № 1, с. 1–6.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
4.VI.1985

КВАДРАТИЧНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАССЕЯНИИ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ВЫСТУПОМ

Бирюков С. В.

Расчет рабочих характеристик устройств обработки сигналов на рэлеевских волнах с отражательными решетками в виде групп прямоугольных канавок или выступов требует учета квадратичных эффектов по отношению $\varepsilon = h/\lambda$, где h — высота неоднородностей, λ — длина рэлеевской волны. Экспериментальные и численные исследования [1–3] показывают, что эти эффекты приводят к сдвигу резонансной частоты и обуславливают отражение на ее второй гармонике. В данной работе получены аналитические выражения для квадратичных поправок к параметрам рассеяния.

Пусть изотропное упругое полупространство занимает область $z < 0$, а на его поверхности расположен выступ из того же материала, занимающий область $0 \leq z \leq h$, $-a \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$. Рассмотрим рассеяние этим выступом плоской рэлеевской волны с полем смещений в плоскости $z=0$ равным $\mathbf{u}^0(x) = \mathbf{u}^0 \exp(ipx - i\omega t)$, где $p = 2\pi/\lambda$, ω — частота, t — время, \mathbf{u}^0 — двумерный амплитудный вектор.

Однородное $z < 0$ и неоднородное $z > 0$ полупространства можно охарактеризовать матрицами поверхностных импедансов $\hat{\zeta}(k)$ и $\hat{\zeta}(k, q)$ [4], линейно связывающими при $z=0$ трансформанты Фурье по координате x вектора смещений $\mathbf{u}(k)$ и нормальных компонент тензора упругих напряжений. Из непрерывности этих компонент следует при $z=0$ уравнение для смещений [4]

$$\hat{\zeta}(k)\mathbf{u}(k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}(k, q)\mathbf{u}(q) dq, \quad (1)$$

где матрицу $\hat{\zeta}(k, q)$ определим ниже, а известная [5–6] матрица $\hat{\zeta}(k)$ имеет вид

$$\hat{\zeta}(k) = \frac{\mu}{g(k)} \begin{bmatrix} k_t^2(k^2 - \alpha k_t^2)^{1/2} & -ik[k_t^2 + 2g(k)] \\ ik[k_t^2 + 2g(k)] & k_t^2(k^2 - k_t^2)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Здесь $g(k) = (k^2 - k_t^2)^{1/2}(k^2 - \alpha k_t^2)^{1/2} - k^2$, $k_t = \omega/c_t$, $\alpha = (c_t/c_l)^2$, а μ , c_t и c_l — соответственно параметр Ламе и скорости объемных поперечных и продольных волн.

Представим полное поле смещений в (1) в виде суммы падающего и рассеянного \mathbf{u}^s полей. Чтобы вычислить рассеянное поле с учетом квадратичных по ε членов, необходимо выполнить две итерации в (1), что приводит к формальному выражению для рассеянного поля

$$\mathbf{u}^s(k) = -\hat{\zeta}^{-1}(k) \left[\hat{\zeta}(k, p) - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}(k, q)\hat{\zeta}^{-1}(q)\hat{\zeta}(q, p) dq \right] \mathbf{u}^0. \quad (2)$$

Для вычисления $\hat{\zeta}(k, q)$ воспользуемся выведенным в работе [4] уравнением для матрицы поверхностного импеданса неоднородной упругой среды как функции координаты z , которое в случае прямоугольного выступа принимает вид

$$\frac{d\hat{\zeta}(k, q, z)}{dz} + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}(k, k', z)\hat{A}\hat{\zeta}(k', q, z) dk' + \hat{S}(k)\hat{\zeta}(k, q, z) + \hat{\zeta}(k, q, z)\hat{T}(q) + \hat{\Phi}(k, q)I(k-q) = 0, \quad 0 \leq z \leq h,$$

с начальным условием $\hat{\zeta}(k, q, h) = 0$, где $I(k) = \frac{\sin ak}{\pi k}$,

$$\hat{\Phi}(k, q) = \mu \begin{bmatrix} k_t^2 - 4(1-\alpha)kq & 0 \\ 0 & k_t^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{T}(q) = -iq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-2\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{S}(k) = ik \begin{bmatrix} 0 & 1-2\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Это уравнение можно переписать в интегральной форме

$$\hat{\zeta}(k, q, z) = \int_z^h e^{\hat{S}(k)(z'-z)} \left[\hat{\Phi}(k, q)I(k-q) + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}(k, k', z')\hat{A}\hat{\zeta}(k', q, z') dk' \right] e^{\hat{T}(q)(z'-z)} dz', \quad (3)$$