АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 1

УДК 534.222

РАБОТА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ ЗВУКА В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Карабутова Н. Е., Новиков Б. К.

Рассмотрены особенности работы параметрического излучателя в плоском слое. Проанализированы различные комбинации мягких и жестких границ слоя. Проведен анализ модовой структуры решения в приближении слабой дифракции высокочастотных волн накачки как в идеальной среде, так и с учетом их затухания.

Задача о формировании волны разностной частоты параметрического излучателя в слое с двумя параллельными границами представляет большой практический интерес. Как известно, распространение акустических волн в слое может существенно отличаться от их распространения в неограниченной среде: проявляется модовая структура, геометрическая дисперсия и т. д.

При параметрическом взаимодействии акустических волн в плоском слое может быть существенным многократное отражение от границ слоя как волны разностной частоты, так и волн накачки. Причем взаимодействие может происходить между всеми отраженными волнами. Возможны различные подходы к решению данной задачи. Учет многократного отражения волн может быть проведен введением бесконечной цепочки мнимых источников [1] или решением уравнения Хохлова — Заболотской — Кузнецова (ХЗК) [2] с соответствующими граничными условиями и последующим исследованием модовой структуры полученного решения.

В общем случае любой из этих подходов приводит к довольно громоздким математическим выражениям. Рассмотрим более простую задачу, предполагая характерную длину дифракции высокочастотных волн накачки таковой, что дифракцией этих волн можно пренебречь, так как они затухают быстрее, чем происходит их отражение от границ слоя.

При таком предположении решение задачи значительно упрощается, так как необходимо учитывать взаимодействие отраженных компонент только для волны разностной частоты.

Решение такой задачи методом мнимых источников было проведено в работе [3]. Применение этого метода выгодно для широких слоев, когда отношение глубины слоя к размерам источника велико. В этом случае количество мнимых источников, учитываемых в решении, меньше числа взаимодействующих мод. Особенно существенно это различие в ближней зоне формирования волны разностной частоты.

В случае же относительно узких каналов, а также в дальней зоне параметрического излучателя более рационально использовать решение в модовом представлении, так как можно ограничиться сравнительно небольшим числом взаимодействующих мод.

Исследование поставленной задачи будем проводить, решая уравнение ХЗК методом последовательных приближений с соответствующими граничными условиями. Будем считать, что параметрический излучатель находится в точке с координатами ($x=x_0$, $y=0$, $z=0$). Звук распространяется вдоль оси z. Плоскость $x=l$ — граница раздела с коэффициентом отражения звука V. Плоскость $x=0$ — вторая граница слоя с коэффициентом отражения W. Коэффициенты отражения V и W не зависят от частоты звука.

Для гауссова распределения амплитуды давления волн накачки на источнике и без учета их дифракции решение уравнения ХЗК в нулевом

приближении будет иметь вид [2]

$$A_1(x, y, z)A_2^*(x, y, z)=p_0^2\exp\left[-2\frac{(x-x_0)^2+y^2}{a^2}-\alpha_B z\right], \qquad (1)$$

где p_0 — начальная амплитуда давления волн накачки на источнике; $\alpha_B=\alpha_1+\alpha_2$ — коэффициент затухания волн накачки; a — характерный размер источника.

Из уравнения ХЗК в первом приближении для амплитуды давления P волны разностной частоты получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{1}{2iK}\Delta_\perp P=\frac{i\varepsilon K}{2c_0^2\rho_0}A_1A_2^*e^{\alpha_- z}, \qquad (2)$$

где $K=\Omega/c_0$ — волновое число волны разностной частоты Ω; ε — нелинейный параметр среды; ρ_0, c_0 — плотность и скорость звука в среде; $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по поперечным координатам; α_- — коэффициент затухания амплитуды волны разностной частоты.

Рассмотрим подробно случай одной мягкой, а другой жесткой границ, который представляет наибольший практический интерес. Решая уравнение (2) совместно с соответствующими граничными условиями, получаем, что комплексная амплитуда давления волны разностной частоты

$$P(x, y, z)=\frac{\varepsilon p_0^2\sqrt{2\pi iK}}{c_0^2\rho_0 l/a}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x_0\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\times$$

$$\times\int_0^z\frac{\exp\left\{-\alpha\tau-\dfrac{2y^2/a^2}{1-i(z-\tau)/L_д}-\dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{32l^2/a^2}[1-i(z-\tau)/L_д]\right\}}{\sqrt{1-i(z-\tau)/L_д}}d\tau, \qquad (3)$$

где $L_д=Ka^2/4$ — характерная длина зоны дифракции волны разностной частоты; $\alpha=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_-=2/l_з$ — эффективный коэффициент затухания; $l_з$ — характерная длина затухания волн накачки.

В решении (3) интеграл может быть взят и решение выразится через функцию ошибок комплексного переменного. Рассмотрим изменение амплитуды в плоскости xz, т. е. $y=0$, так как именно в этой плоскости наблюдается максимум излучения. Преобразуя (3), получаем

$$P(x, y=0, z_д)=\frac{i\varepsilon p_0^2\sqrt{2\pi iK^2a^2}}{c_0^2\rho_0 l/a}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\{-\alpha z_д L_д-i\alpha L_д\}\cos\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}x_0}{\sqrt{\pi^2(2n+1)^2/(32l^2/a^2)-i\alpha L_д}}\times$$

$$\times\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\left\{\Phi\left[\sqrt{\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2}{32l^2/a^2}-i\alpha L_д\right](1-iz_д)}\right]-\right.$$

$$\left.-\Phi\left[\sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{32l^2/a^2}-i\alpha L_д}\right]\right\}, \qquad (4)$$

где $z_д=z/L_д$ — безразмерное расстояние, выраженное в длинах дифракции волны разностной частоты.

Проанализируем вначале случай слабого затухания, т. е. когда $\alpha=0$. Относительное изменение комплексных амплитуд мод более ярко выражено. Для удобства пронормируем амплитуду давления так, чтобы $P_н=P c_0^2\rho_0(l/a)/(i\varepsilon p_0^2K^2a^2\sqrt{2\pi i})$. Тогда пормированное давление волны раз-

ностной частоты

$$P_{\text{н}}(x, y=0, z_{\text{д}}) = \frac{i\sqrt{32}\,l/a}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x \times$$

$$\times \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x_0 \left\{ \Phi\left[\frac{\pi(2n+1)}{\sqrt{32}\,l/a} \sqrt{1-iz_{\text{д}}} \right] - \Phi\left[\frac{\pi(2n+1)}{\sqrt{32}\,l/a} \right] \right\}. \quad (5)$$

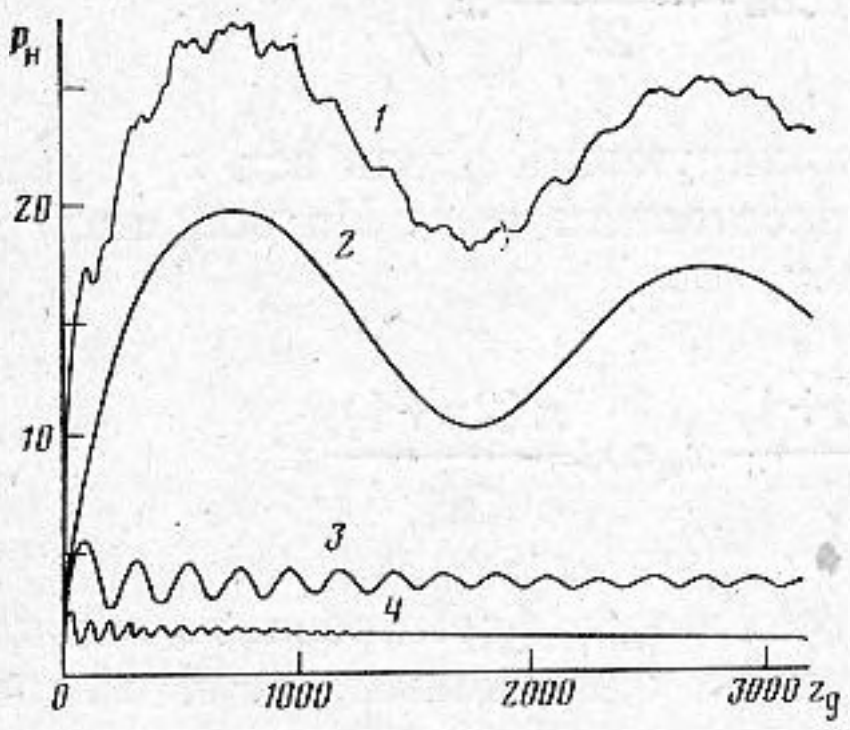
Анализ решения (5) позволяет сделать следующие выводы. Амплитуда давления n-й моды осциллирует вдоль оси z с пространственным периодом

$$T_n = 64\,(l^2/a^2)\,L_{\text{д}}/[\pi(2n+1)^2], \quad (6)$$

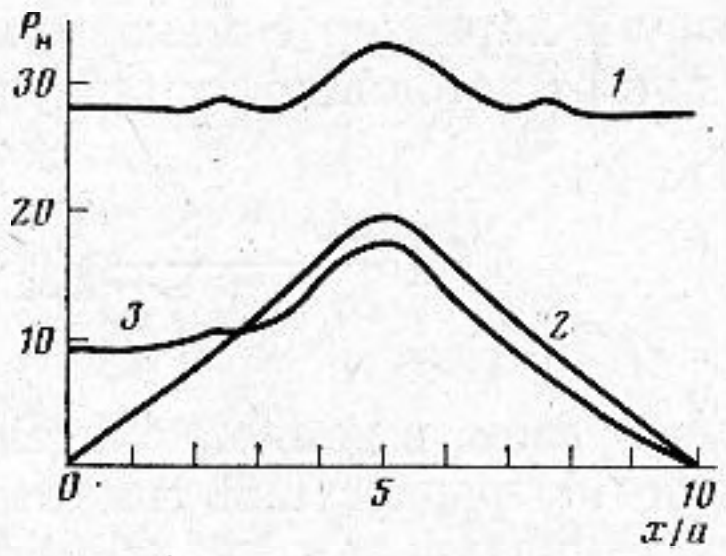
который с увеличением номера моды n убывает как $1/(2n+1)^2$. Амплитуда осцилляций с увеличением расстояния $z_{\text{д}}$ уменьшается и при

$$z_{\text{д}} \geqslant (1600\,l^2/a^2)/[\pi(2n+1)^2] \quad (7)$$

значение амплитуды давления в n-й моде можно с достаточной степенью



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Осевое распределение амплитуды давления волны разностной частоты (*1*) и первых трех мод в слое с одной жесткой, а другой мягкой границами. *2–4* – соответствуют номерам моды $n=0; 1; 2$

Фиг. 2. Распределение амплитуды давления волны разностной частоты в зависимости от глубины слоя для $z_{\text{д}}=100$. *1–3* соответствуют (V, W), (1,1); (–1, –1); (–1,1)

точности считать установившимся и равным постоянной для каждой моды величине

$$P_{\text{н}n} = \frac{i\sqrt{32}\,l/a}{\pi(2n+1)} \left\{ 1 - \Phi\left[\frac{\pi(2n+1)}{\sqrt{32}\,l/a} \right] \right\} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x \cdot \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x_0, \quad (8)$$

убывающей приблизительно как $1/(2n+1)$.

На фиг. 1 приведены зависимости нормированной амплитуды волны разностной частоты на оси пучка, а также нормированные амплитуды давления мод для случая $x_0=l/a$ и $l/a=10$. Амплитуды давления мод осциллируют с периодом (6) и убывают, стремясь к некоторому постоянному для каждой моды значению (8), достигаемому на расстоянии (7). Таким образом, видно, что на расстояниях $z>25\,T_n$ осцилляции n-й моды практически исчезают и вклад каждой моды в формирование волнового поля на разностной частоте становится постоянным. Иначе говоря, с увеличением расстояния z как относительный, так и абсолютный вклад всех мод (в рамках используемого приближения недифрагирующих и незатухающих высокочастотных волн накачки) остается неизменным. Эта закономерность сказывается и на форме распределения амплитуды давления волны разностной частоты по глубине. На расстояниях $z>25\,T_0$ это распределение стабилизируется и имеет вид, приведенный на фиг. 2, кривая *3*.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 0$. Проанализируем подробно решение (4). В случае $l_з \gg T_0$, где T_0 — период осевых осцилляций низшей моды, амплитуда давления при $z \to \infty$ в n-й моде будет равна

$$P_{нn} \sim \frac{1}{\sqrt{z_д}} \frac{32l^2/a^2}{i\pi^2(2n+1)^2} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x_0 \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x,$$

т. е. все моды будут распространяться с амплитудой, убывающей как $1(2n+1)^2$. Относительный вклад каждой моды в формирование волнового поля на разностной частоте становится постоянным.

В случае, когда $l_з < T_N$, где T_N — период высшей моды, существующей в слое, источники низкочастотного излучения затухают раньше, чем становятся некогерентными. Поэтому амплитуда мод перестает зависеть от номера моды и амплитуда давления волны разностной частоты

$$P_н(x, y=0, z_д) = \frac{e^{-\alpha z_д L_д}}{i\sqrt{i\alpha L_д}} \{\Phi[i\sqrt{\alpha z_д L_д + i\alpha L_д}] - \Phi[i\sqrt{i\alpha L_д}]\} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x_0 \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x. \qquad (9)$$

Амплитуда давления носит уже не осциллирующий вдоль оси z, а релаксирующий характер с максимумом на расстоянии $z \sim l_з$. На больших расстояниях от источника амплитуда убывает, как

$$P_н \sim -\frac{1}{\alpha L_д \sqrt{z_д}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x_0 \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l} x. \qquad (10)$$

Таким образом, в данном случае вклад всех мод в формирование волнового поля на разностной частоте становится одинаковым, т. е. модовая структура излучения не успевает проявиться, и формирование низкочастотной волны происходит так же, как в неограниченном пространстве.

В промежуточном случае, когда $T_0 > l_з > T_N$, моды для которых $T_n < l_з$, возбуждаются так же, как и в случае слабого затухания волн накачки,— их некогерентность с источниками волны разностной частоты проявляется раньше, чем затухание последних. Моды с малыми номерами, для которых $T_n > l_з$, возбуждаются практически когерентными источниками, которые затухают раньше, чем становятся несинхронными. Поэтому амплитуда этих мод ограничивается затуханием волн накачки, а не фазовым рассогласованием. С увеличением расстояния наблюдения относительный вклад этих мод уменьшается, а вклад мод с большими номерами увеличивается.

В случае двух мягких границ, когда $V=W=-1$, нормированная амплитуда давления волны разностной частоты при $y=0$, $\alpha=0$ может быть представлена, как

$$P_н(x, y=0, z_д) = \frac{i\sqrt{8}l/a}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l} x_0 \times$$

$$\times \left\{\Phi\left[\frac{\pi n}{\sqrt{8}l/a}\sqrt{1-iz_д}\right] - \Phi\left[\frac{\pi n}{\sqrt{8}l/a}\right]\right\}. \qquad (11)$$

На фиг. 3 приведены зависимости нормированной амплитуды давления волны разностной частоты на оси пучка и амплитуды давления первых трех мод при $x_0 = l/2$ и $l/a = 10$.

Анализ решения (11) приводит к выводам качественно таким же, как и в случае $V=1$, $W=-1$. Но количественные характеристики несколько отличаются. Из решения (11) следует, что амплитуда мод осциллирует с периодом

$$T_n = 16(l^2/a^2) L_д/(\pi n^2), \qquad (12)$$

который с увеличением номера моды n убывает, как $1/n^2$. Амплитуда осцилляций с увеличением расстояния уменьшается и при

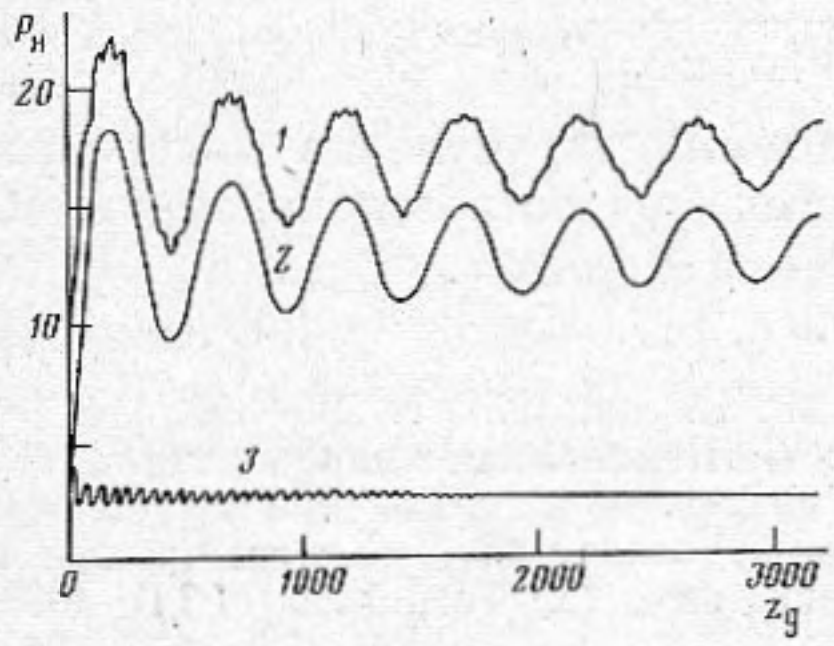
$$z_д \geqslant (400l^2/a^2)/(\pi n^2) \tag{13}$$

амплитуда моды стабилизируется, достигнув значения

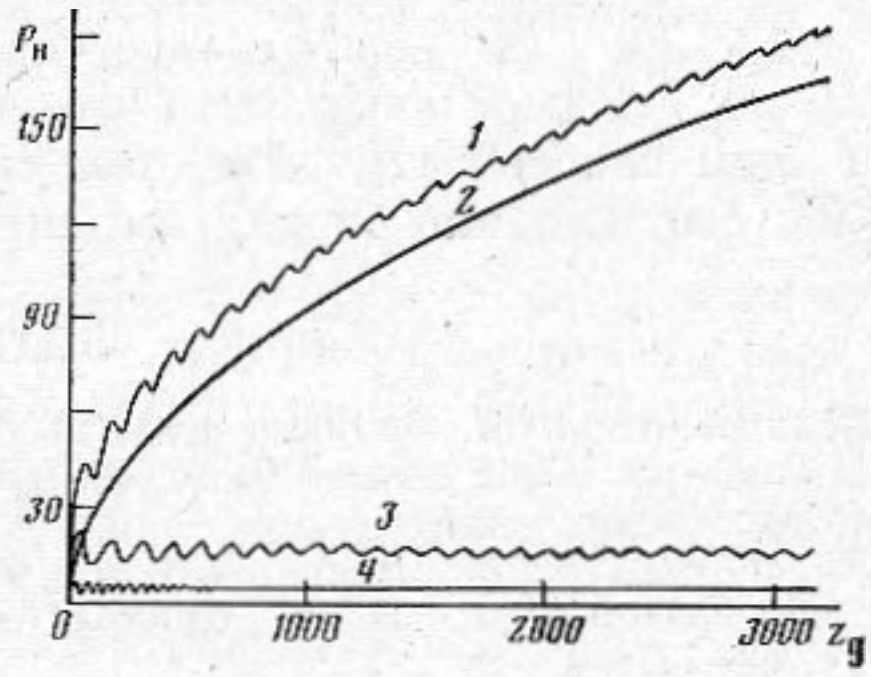
$$P_{Hn} = \frac{i\sqrt{8}l/a}{\sqrt{\pi n}} \left\{ 1 - \Phi\left[\frac{\pi n}{\sqrt{8}l/a} \right] \right\} \sin\frac{\pi n}{l} x_0 \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{14}$$

убывающего, как $1/n$. При $x_0 = l/2$ амплитуды всех четных мод равны нулю.

Как следует из (14), на больших расстояниях z относительный вклад каждой моды становится постоянным и форма распределения амплитуды



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Осевое распределение амплитуды давления волны разностной частоты (*1*) и первых двух мод в слое с двумя мягкими границами. *2–3* соответствуют номерам мод $n=1;\ 3$

Фиг. 4. Осевое распределение амплитуды давления волны разностной частоты (*1*) и первых трех мод в слое с двумя жесткими границами. *2–4* соответствуют номерам мод $n=0;\ 2;\ 4$

давления волны разностной частоты по глубине (фиг. 2, кривая *2*) стабилизируется. Учет затухания в среде не приводит к качественно новым результатам по сравнению с рассмотренным выше случаем.

В случае двух жестких границ, когда $V=W=1$, ситуация коренным образом отличается от рассмотренных выше случаев из-за наличия в решении нулевой моды. Амплитуда давления нулевой моды при $y=0$ изменяется по закону

$$P_{Hn=0} = i3(\sqrt{1-iz_д}-1), \tag{15}$$

а модуль амплитуды на больших расстояниях в отсутствие затухания волн накачки растет, как $\sqrt{z_д}$. Для других мод распределение давления может быть выражено через функцию ошибок комплексного переменного

$$P_{Hn\neq 0} = \frac{i\sqrt{8}l/a}{\sqrt{\pi n}} \left\{ \Phi\left[\frac{\pi n}{\sqrt{8}l/a} \sqrt{1-iz_д} \right] - \right.$$
$$\left. - \Phi\left[\frac{\pi n}{\sqrt{8}l/a} \right] \right\} \cos\frac{\pi n}{l} x \cos\frac{\pi n}{l} x_0. \tag{16}$$

На фиг. 4 приведены зависимости нормированной амплитуды давления на оси и амплитуды первых трех мод.

Как следует из решения (16), амплитуда n-й моды осциллирует с периодом (12), а на расстоянии $z_д$, определяемом (13), амплитуда мод стабилизируется. При $x_0 = l/2$ амплитуды всех нечетных мод равны нулю и в слое распространяются только четные моды. Таким образом, на больших расстояниях относительный вклад всех мод в формирование волнового поля на разностной частоте по сравнению с нулевой модой уменьша-

ется, но абсолютное значение амплитуд остается неизменным. Эта закономерность сказывается на форме распределения амплитуды давления по глубине (фиг. 2, кривая *1*).

При наличии в среде затухания рост амплитуды нулевой моды ограничивается затуханием волн накачки и дифракцией волны разностной частоты

$$P_{\text{Н}n=0} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{3}{2i\alpha L_{\text{д}}\sqrt{iz_{\text{д}}}}. \qquad (17)$$

Сравнивая (17) с законом затухания остальных мод, можно сделать вывод, что при слабом затухании волн накачки отношение амплитуды нулевой моды к амплитуде n-й моды будет прямо пропорционально квадрату номера моды и обратно пропорционально α:

$$|P_{\text{Н}n=0}|/|P_{\text{Н}n\neq 0}| \sim \frac{3\pi^2}{16l^2/a^2}\frac{n^2}{\alpha L_{\text{д}}}, \qquad (18)$$

т. е. чем слабее затухание, тем сильнее доминирует нулевая мода. При $l_{\text{з}}<T_N$ соотношение между амплитудами всех мод остается неизменным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1957, с. 290–320.
2. *Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И.* Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981.
3. *Карабутова Н. Е., Новиков Б. К.* Формирование диаграммы направленности в шельфовой зоне.– В кн.: Прикладная акустика, вып. IX. Таганрог: ТРТИ, 1983, с. 67–77.

Московский институт
народного хозяйства
им. Г. В. Плеханова

Поступила в редакцию
29.XI.1984