

АМПЛИТУДА РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ ЗВУКА ОГРАНИЧЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ЖИДКОСТИ

Музыченко В. В., Рыбак С. А

В задаче рассеяния волн вытянутой ($L \gg R$) цилиндрической оболочкой можно приближенно связать фурье-компоненты по φ (фигура) потенциала рассеянного звукового поля Φ_m^σ и его нормальной производной $(\partial\Phi/\partial n)_m^\sigma$ на боковой поверхности σ оболочки с помощью импеданса Z_m на бесконечной цилиндрической поверхности (см., например, [1]), а именно

$$\Phi_m^\sigma = \frac{Z_m}{i\rho\omega} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_m^\sigma, \quad \text{где } Z_m = -i\rho\omega R \frac{H_m^{(1)}(\kappa R)}{(\kappa R) H_m^{(1)'}(\kappa R)}. \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность среды, ω — круговая частота, $H_m^{(1)}(\kappa R)$ и $H_m^{(1)'}(\kappa R)$ — функция Ханкеля первого рода и ее первая производная соответственно (штрих означает дифференцирование по аргументу), $\kappa = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, k и k_z — модуль волнового вектора падающей волны и его проекция на ось z соответственно.

Потенциал поля Φ вне оболочки выражается через значения Φ^σ и $(\partial\Phi/\partial n)^\sigma$ с помощью интеграла Кирхгофа в виде суммы монопольного $\Phi^{(1)}$ и дипольного $\Phi^{(2)}$ членов [2]:

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} = \left[\frac{1}{4\pi} \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)^\sigma \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \right] + \left[-\frac{1}{4\pi} \iint_{(\sigma)} \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) d\sigma \right]. \quad (2)$$

Для задачи рассеяния плоской звуковой волны $\Phi^0 = A_0 \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z)$ на упругой цилиндрической оболочке длины L , ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами радиуса R (фигура), потенциал Φ в волновой зоне есть

$$\Phi = \Phi_{\text{ц}} + \Phi_{\text{в}} + \Phi_{\text{н}} = [\Phi_{\text{ц}}^{(1)} + \Phi_{\text{ц}}^{(2)}] + [\Phi_{\text{в}}^{(1)} + \Phi_{\text{в}}^{(2)}] + [\Phi_{\text{н}}^{(1)} + \Phi_{\text{н}}^{(2)}], \quad (3)$$

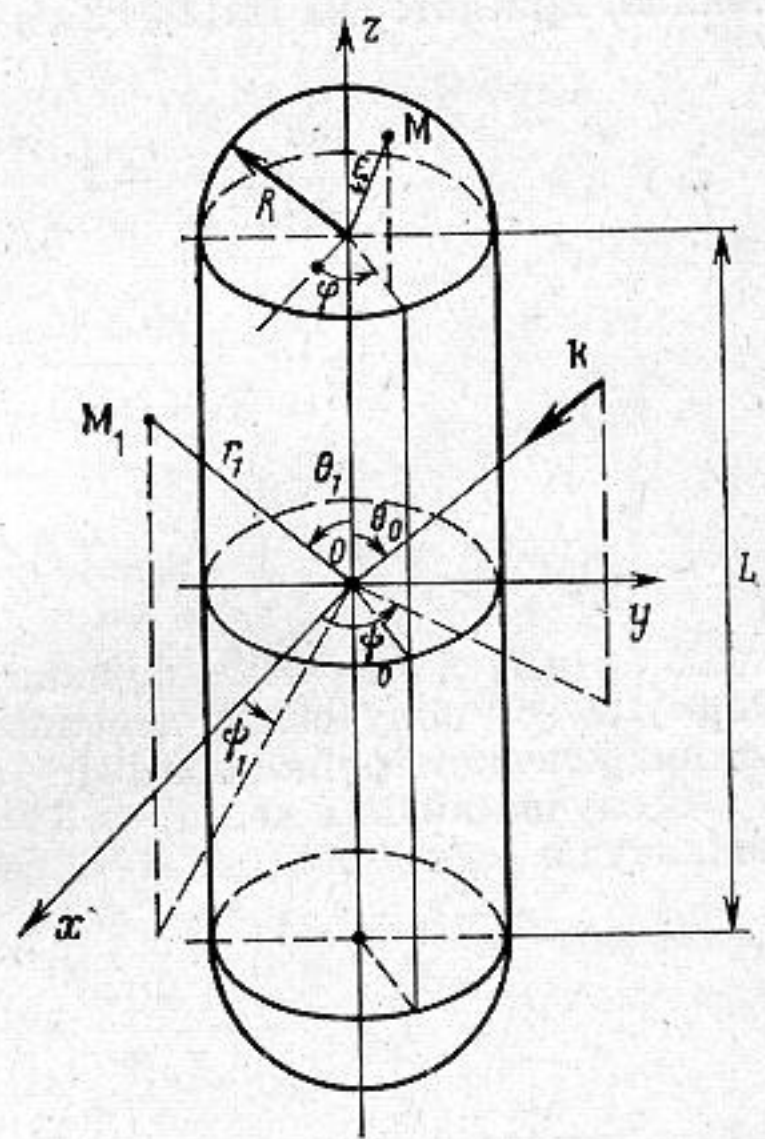
где потенциал $\Phi_{\text{ц}}$, создаваемый цилиндрической поверхностью, равен

$$\Phi_{\text{ц}} = \frac{R}{2} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_m^\sigma (-i)^m e^{im\psi_1} \times \left[J_m(kR \sin \theta_1) + \left(\frac{Z_m}{i\rho\omega} \right) k \sin \theta_1 J_m' \times \right. \\ \left. \times (kR \sin \theta_1) \right] \times \frac{2 \sin[-k(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)L/2]}{[-k(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)]}, \quad (4)$$

а потенциалы $\Phi_{\text{в}}$ и $\Phi_{\text{н}}$, создаваемые верхней и нижней полусферами, соответственно

$$\Phi_{\text{в,н}}^{(1)} = \frac{\Lambda_0 R^2}{4\pi} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} F_{\text{в,н}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\partial}{\partial R} F_0 \right] F_1 \sin \zeta d\varphi d\zeta \quad (5)$$

$$\Phi_{\text{в,н}}^{(2)} = \frac{R^2}{2} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} F_{\text{в,н}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{Z_m}{i\rho\omega} \right) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_m^\sigma (-i)^m e^{im\psi_1} \times \int_0^\pi \left\{ \sin \zeta Q_0 \frac{\partial}{\partial R} [J_m(kR \sin \theta_1 \sin \zeta) \cdot Q_1] \right\} d\zeta, \quad (6)$$



Расположение системы координат: M_1 — точка наблюдения; r_1 , ψ_1 , θ_1 — сферические координаты точки наблюдения; \mathbf{k} — волновой вектор падающей волны; ψ_0 и θ_0 — углы падения плоской волны; M — точка на поверхности тела; φ и ζ — координаты точки M ; R — радиус оболочки и полусфер; L — длина оболочки

причем

$$F_{0,1} = \exp[-ik(\sin \theta_{0,1} \sin \zeta \cos(\varphi - \psi_{0,1}) + \cos \theta_{0,1} \cos \zeta)R];$$

$$Q_{0,1} = \exp[-ikR \cos \theta_{0,1} \cos \zeta]; \quad F_{в,н} = \exp[\mp ik(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)L/2];$$

$$0 \leq \zeta_{в} \leq \pi/2; \quad \pi/2 \leq \zeta_{н} \leq \pi.$$

Отметим, что выражение для потенциала $\Phi_{в,н}^{(1)}$ получено с учетом того, что полу-сферы выбраны абсолютно жесткими и, следовательно, для них $(\partial\Phi/\partial n)^\sigma = -(\partial\Phi/\partial n)^{\sigma,0}$. Выражение для потенциала $\Phi_{в,н}^{(2)}$ получено в предположении, что потенциал Φ^σ является непрерывным продолжением потенциала определенного на цилиндрической поверхности по формуле (1), что допустимо при $L \gg R$. В формулах (4) и (6) проведено разложение по углу φ , m — номер соответствующей моды.

Определим теперь $(\partial\Phi/\partial n)_m^\sigma$. Исходя из того что на упругой цилиндрической оболочке нормальная колебательная скорость W_m с одной стороны равна $W_m = +[(\partial\Phi/\partial n)_m^{\sigma,0} + (\partial\Phi/\partial n)_m^\sigma]$, а с другой $-W_m = i\rho\omega[\Phi_m^{\sigma,0} + \Phi_m^\sigma]/Z_m^y$, где $Z_m^y = -iEhD/D_{33}\omega(1-\nu^2)R^2$ — импеданс упругих колебаний оболочки на m -й моде (здесь h — толщина оболочки, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки соответственно, D и D_{33} — главный определитель и соответствующий минор системы уравнений движения оболочки [3, с. 178]), то для случая резонансного рассеяния, при котором $\text{Im}(Z_m + Z_m^y) = 0$, получаем

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_m^\sigma = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_m^{\sigma,0} [1 + Y_m] \equiv -\frac{i\rho\omega\Phi_m^{\sigma,0}}{Z_{0m}} [1 + Y_m], \quad (7)$$

где

$$Y_m = \frac{Z_{0m} - Z_m}{\text{Re } Z_m + \text{Im}(Z_m + Z_m^y)}; \quad Z_{0m} = -i\rho\omega R \frac{J_m(\kappa R)}{(\kappa R)J_m'(\kappa R)};$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_m^{\sigma,0} = -A_0(-i)^m e^{-im\psi_0} k \sin \theta_0 J_m'(kR \sin \theta_0). \quad (8)$$

Здесь $J_m(\kappa R)$ и $J_m'(\kappa R)$ — функция Бесселя и ее первая производная соответственно. Формула (8) получена с использованием известного разложения плоской волны по цилиндрическим функциям [2].

В случае низких частот ($kR \ll 1$) из формул (3)–(8) получаем, что упругая часть амплитуды рассеяния для $m=0$ равна (так как $\Phi \equiv \Phi^{тв} + \Phi^y$):

$$f_{(0)}^y = \frac{\Phi_{(0)}^y}{A_0[e^{ikr_1/r_1}]} = i \frac{1}{\pi} \frac{2 \sin[-k(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)L/2]}{[-k(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)]} \quad (9)$$

и, следовательно, не зависит от R .

Величина $f_{(0)}^y$ максимальна при $\theta_1 = \pi - \theta_0$; $\psi_0 = \psi_1$ (направление зеркального отражения) и равна $[f_{(0)}^y]_{\text{max}} = iL/\pi$. Для $m=1$

$$f_{(1)}^{(y)} = -2 \frac{i \sin \theta_1}{\pi \sin \theta_0} \cos(\psi_0 - \psi_1) \frac{2 \sin[-k(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)L/2]}{[-k(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)]};$$

$$[f_{(1)}^y]_{\text{max}} = -2i \frac{L}{\pi}. \quad (10)$$

Выражения (4)–(8) получены в предположении, что распределение поля вдоль оси z на оболочке имеет ту же зависимость, что и в падающей волне, т. е. $\Phi^\sigma \sim \exp(ik_z z)$. В действительности, на ограниченной шарнирно опертой оболочке зависимость от z вследствие отражения от опор дается выражением $[\exp(ik_z z) - \exp(-ik_z z)] = 2i \sin(k_z z)$, что приводит к появлению незеркального отражения [4], т. е. к появлению лепестка в локационном направлении. В указанном направлении амплитуды рассеяния также определяются формулами (9) и (10).

Таким образом, выражения (3)–(8) позволяют аналитически (приближенно) определить амплитуду рассеяния упругой ограниченной цилиндрической оболочки. С их помощью легко проследить влияние параметров оболочки на формирование лепестков диаграммы направленности рассеянного поля.

Если в формуле (8) устремить $Z_m^y \rightarrow \infty$, то формулы (3)–(8) дают выражение для амплитуды рассеяния от тонкого абсолютно твердого ограниченного цилиндрического тела. Отметим, что суммарный (по m) потенциал рассеянного поля Φ при этом идентичен выражениям, полученным ранее другим методом в работах [5, 6].

Разумеется, изложенное выше применимо и для задачи излучения. Для этого достаточно в формуле (7) устремить $Z_{0m} \rightarrow \infty$, а под $i\rho\omega\Phi_m^{\sigma,0}$ понимать m -ю компоненту распределенной возбуждающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Д. Г., Симонов И. В. Асимптотические оценки комплексных частот колебаний оболочки в жидкости.— Препринт № 186. М.: Институт проблем механики АН СССР. 1981, с. 41—42.
2. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.
3. Ляпунов В. Т., Никифоров А. С. Виброизоляция в судовых конструкциях. Л.: Судостроение, 1975.
4. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
5. Федорюк М. В. Рассеяние звуковых волн тонким акустически жестким телом вращения.— Акуст. журн., 1981, т. 27, № 4, с. 605—609.
6. Бойко А. И. Рассеяние плоских волн тонким телом вращения.— Акуст. журн., 1983, т. 29, № 3, с. 321—325.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
9.1.1985.

УДК 534

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ТОНКОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ
В ДВУСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Немцова В. Н., Федорюк М. В.

Пусть имеется жидкий слой, лежащий на жидком полупространстве. При $x < 0$ предполагается наличие вакуума или достаточно разреженной среды. При $x > 0$ среда состоит из двух слоев: верхнего слоя с параметрами ρ_c, c и нижнего слоя — полупространства — с параметрами ρ_c^1, c_1 . В пределах каждого слоя среда однородна и изотропна.

Пусть в верхнем слое $0 < x < h$ расположено абсолютно жесткое тело вращения \mathcal{D}_e , так что его центр лежит в точке с координатами $(x_0, 0, l/2)$, где l — длина тела (фиг. 1).

Предположим, что в верхнем слое могут существовать нормальные волны

$$P_j = A_j H_0^{(1)}(\alpha_j |\rho - \rho_0|) \sin(b_j x/h). \quad (1)$$

где $|\rho| = \sqrt{y^2 + z^2}$, $|\rho_0| = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$ (причем $\rho_0 \gg 1/\alpha_j$, $\rho_0 \gg l$), $\alpha_j = \sqrt{k^2 h^2 - b_j^2}/h$, а b_j находится из дисперсионного уравнения [1] $\text{ctg } b_j = -\rho_c \sqrt{h^2 k^2 - h^2 k_1^2 - b_j^2} / \rho_c^1 b_j$. Это уравнение в зависимости от $h^2 k^2 - h^2 k_1^2$ может иметь различное число вещественных корней. Будем считать, что $h^2 k^2 - h^2 k_1^2$ таково, что имеется $N \geq 1$ положительных чисел $b_1^2, b_2^2, \dots, b_N^2$.

Рассмотрим задачу о рассеянии нормальной волны (1) тонким телом вращения, причем предположим, что длина тела имеет порядок длины волны, а его толщина много меньше длины волны: $l \cong \lambda$, $d \ll \lambda$.

Границу S тела зададим уравнением $r = \varepsilon F(z)$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}$, φ, z — цилиндрические координаты, функция $F(z)$ — неотрицательная и достаточно гладкая при $0 < z < l$, $F(0) = F(l) = 0$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Рассеянное поле внутри слоя $0 < x < h$ должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)U = 0, \quad (2)$$

краевому условию

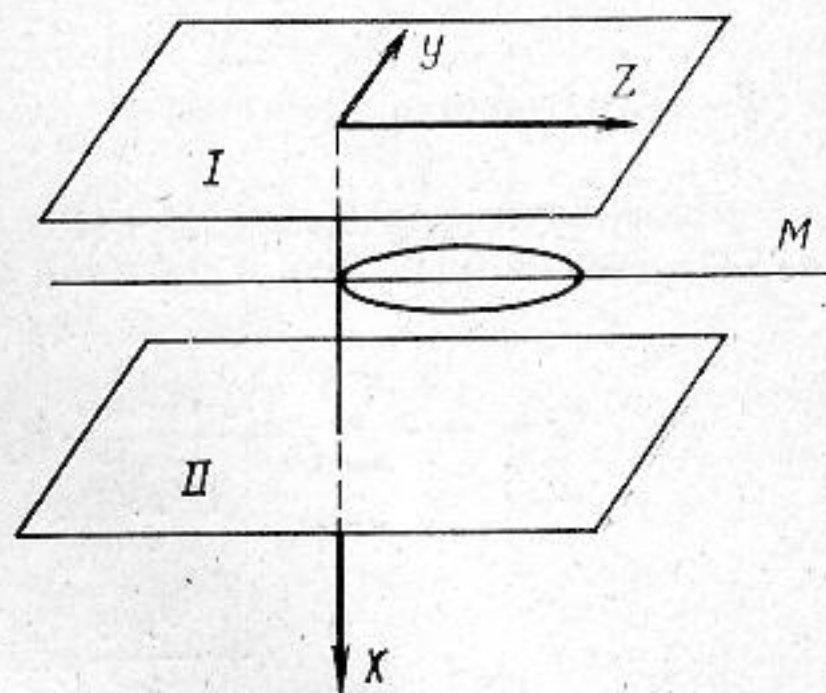
$$\partial U / \partial n|_S = -\partial P_j / \partial n|_S, \quad (r, z) \in S, \quad (3)$$

и условиям излучения на бесконечности. Нормаль n — внешняя.

Проанализируем рассеянное поле при помощи метода [2, 3], который ранее был использован для решения задач дифракции в работах [4, 5].

Приближенное решение задачи (2)–(3) будем искать в виде суммы волнового потенциала, сосредоточенного на отрезке $r=0, 0 < z < l$ и его производных:

$$U = \int_0^l \mu_1(t) G(r, z-t) dt + \int_0^l \mu_2(t) G_x(r, z-t) dt + \int_0^l \mu_3(t) G_y(r, z-t) dt. \quad (4)$$



Фиг. 1. Тонкое тело вращения \mathcal{D}_e , расположенное в двухслойной жидкости: I — плоскость $x=0$, II — плоскость $x=h$, M — ось вращения тела