

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СРЕДЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Велижанина К. А., Вощукова Е. А., Нефедов Н. Н.

При расчете резонансных звукопоглотителей используется предположение о том, что величина активной составляющей входного импеданса резонатора R определяется лишь диссипативными потерями при движении воздуха в его горле. При экспериментальных же исследованиях резонансных поглотителей было обнаружено, что величина R зависит не только от частоты звука и геометрических параметров лицевой панели, но и от глубины полости резонатора [1]. Оказывается, что наряду с потерями в горле резонатора, величину R определяют потери на вязкость и теплопроводность в объеме (полости) резонатора. В самом деле, изменение геометрии полости изменяет поле колебательной скорости и температуры в объеме резонатора и, в частности значения температуры и тангенциальных составляющих колебательной скорости в окрестности границ резонатора, которыми и определяется величина диссипативных потерь в полости. Для того чтобы выяснить, каким образом вязкость и теплопроводность среды влияют на поле внутри резонатора (а значит, и на его акустические свойства), в настоящей работе решена задача о вынужденных колебаниях среды с малой вязкостью и теплопроводностью в резонаторе цилиндрической формы.

Рассматривалась полная линеаризованная система уравнений гидродинамики (см., например, [2]) в цилиндре со стандартными граничными условиями на жесткой поверхности (условия прилипания и условие для температуры) в случае установившихся колебаний частоты ω . Приближенное решение ищется в виде рядов по степеням малого параметра ε , пропорционального квадратному корню из вязкости и теплопроводности, и имеет регулярную часть (скажем, \bar{Q}), описывающую поле внутри объема, и погранслойную часть ($\Pi\bar{Q}$), описывающую вязкие и тепловые волны, существенные вблизи границ. Тогда исходная система уравнений гидродинамики заменяется последовательностью более простых задач, из которых и определяется приближенное решение (см. [3, 4]).

Пусть цилиндр имеет длину l и радиус a . Поле внутри цилиндра возбуждается через отверстие радиуса r_0 на одном из оснований цилиндра (при $z=0$). Предполагается, что на отверстии колебательная скорость постоянна и равна $v_0 e^{i\omega t}$ ($\lambda=i\omega$).

В нулевом приближении по малому параметру ε ($\varepsilon=\sqrt{\mu\omega/c_0^2\rho}$, μ — вязкость среды, ρ — плотность, c_0 — адиабатическая скорость звука) задача для регулярной части потенциала скоростей \bar{Q}_0 такая же, как и для идеальной среды. Ее решение, как известно, имеет вид

$$\bar{Q}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{ik_p z} + B_n e^{-ik_p z}) J_0(k_n r),$$

где $k_p = \sqrt{k^2 - k_n^2}$, $k = \omega/c_0$, k_n — определяется из граничного условия на боковых стенках волновода при $r=a$, A_n и B_n — из граничных условий при $z=0$ и $z=l$.

Зная \bar{Q}_0 , можно определить амплитуды вязких и тепловых волн на каждой из поверхностей, ограничивающих резонатор.

Однако вихревая составляющая колебательной скорости $\Pi_0 v$ не удовлетворяет условию $\text{div } v = 0$. Это условие будет выполнено лишь после определения $\Pi_{1j} v_n$ — нормальной составляющей вихревой скорости в первом приближении по ε . Наличие нормальных составляющих колебательной скорости $\Pi_{1j} v_n$ нарушает в свою очередь граничные условия для регулярной части потенциала скоростей. К изменению граничных условий для \bar{Q} в следующем порядке по ε приводит и наличие тепловой волны, так как при этом имеются не равные нулю нормальные составляющие погранслойной части потенциальной скорости $\partial\Pi_{2j} Q / \partial\xi_j$. Таким образом, для потенциала скоростей \bar{Q}_1 имеет место задача с ненулевыми граничными условиями ($\varepsilon\bar{Q}_1$ есть то изменение поля, которое обусловлено наличием вязкости и теплопроводности): $\Delta\bar{Q}_1 + k^2\bar{Q}_1 = 0$;

$$\partial\bar{Q}_1/\partial z|_{z=0} = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r_0 \\ (-\partial\Pi_{21} Q / \partial\xi_1 + \Pi_{11} v_z)|_{\xi_1=0}, & r_0 < r \leq a \end{cases}$$

$$\partial\bar{Q}_1/\partial z|_{z=l} = (\partial\Pi_{22} Q / \partial\xi_2 + \Pi_{12} v_z)|_{\xi_2=0},$$

$$\partial\bar{Q}_1/\partial r|_{r=a} = (\partial\Pi_{23} Q / \partial\xi_3 + \Pi_{13} v_r)|_{r=a}, \quad \xi_1 = z/\varepsilon, \quad \xi_2 = (l-z)/\varepsilon, \quad \xi_3 = (a-r)/\varepsilon.$$

Обозначая $\sqrt{\lambda\omega} = x$, $\sqrt{\beta\gamma\lambda\omega} = y$, где $\beta = \mu/\kappa\rho$, κ — температуропроводность среды, $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей, запишем

$$\Pi_{11} v_z = \frac{c_0}{x} \exp\left(\frac{x}{c_0} \xi_1\right) \sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 (A_n + B_n) J_0(k_n r),$$

$$\Pi_{12} v_z = -\frac{c_0}{x} \exp\left(\frac{x}{c_0} \xi_2\right) \sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 (A_n e^{ik_p l} + B_n e^{-ik_p l}) J_0(k_n r),$$

$$\Pi_{13}v_r = -\frac{c_0}{x} \exp\left(\frac{x}{c_0}\xi_3\right) \sum_{n=0}^{\infty} k_p^2 (A_n e^{ikh_p z} + B_n e^{-ikh_p z}) J_0(k_n a),$$

$$\frac{\partial \Pi_{21} Q}{\partial \xi_1} = \frac{\lambda^2(\gamma-1)}{c_0 y} \exp\left(\frac{y}{c_0}\xi_1\right) \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) J_0(k_n r),$$

$$\frac{\partial \Pi_{22} Q}{\partial \xi_2} = \frac{\lambda^2(\gamma-1)}{c_0 y} \exp\left(\frac{y}{c_0}\xi_2\right) \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^{ikh_p l} + \bar{B}_n^{-ikh_p l}) J_0(k_n r),$$

$$\frac{\partial \Pi_{23} Q}{\partial \xi_3} = \frac{\lambda^2(\gamma-1)}{c_0 y} \exp\left(\frac{y}{c_0}\xi_3\right) \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{ikh_p z} + B_n e^{-ikh_p z}) J_0(k_n a).$$

Решение задачи для \bar{Q}_1 можно найти стандартным образом. Используя полученное значение потенциала скоростей, можно вычислить удельный безразмерный входной импеданс полости резонатора: $Z_{\text{вх}} = p/v_0 \rho c_0 S_0 \eta$, где S_0 — площадь отверстия, η — коэффициент перфорации, p — сила давления на входе в полость резонатора

$$p = i\omega \rho \int_{S_0} Q|_{z=0} d\sigma.$$

При этом для импеданса имеем $Z_1 = Z_0 + Z_{11} + Z_{12} + Z_{13}$. Здесь Z_0 — импеданс, вычисленный без учета вязкости и теплопроводности среды (выражение для Z_0 было получено в [5] и подробно исследовано в [6]). Отметим, что Z_0 — величина чисто мнимая.

Для Z_{11} , связанного с потерями в пограничном слое на передней стенке, получаем

$$Z_{11} = \frac{1+i}{c_0} (\gamma-1) h \operatorname{ctg} kl (1-r_0^2/a^2) +$$

$$+ \frac{1+i}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} [(\gamma-1) h k^2 + g k_n^2] [4J_1^2(k_n r_0) \operatorname{cth}^2 b_p l / (k_n r_0)^2 J_0^2(k_n a) b_p^2] + \frac{(1+i) r_0^2 \operatorname{ctg} kl}{c_0 a^2 k} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \{ [2(\gamma-1) h k^2 + g k_n^2] J_1^2(k_n r_0) / (k_n r_0)^2 J_0^2(k_n a) \} \operatorname{ctg} b_p l \left(\frac{4}{b_p} \right) -$$

$$- \frac{8(1+i)}{c_0 a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_1(k_m r_0) \operatorname{cth} b_p' l}{(k_m r_0) J_1^2(k_m a) b_p'} \sum_{n=1}^{\infty} [k^2(\gamma-1) h + k_n^2 g] \frac{J_1(k_n r_0) \operatorname{cth} b_p l S_{mn}}{(k_n r_0) J_0^2(k_n a) b_p}; \quad b_p = ik_p \quad (1)$$

$$\left(h = \sqrt{\kappa \omega / 2\gamma}; \quad g = \sqrt{\mu \omega / 2\rho}; \quad S_{mn} = \int_0^{r_0} J_0(k_n r) J_0(k_m r) dr \right).$$

Для Z_{12} , связанного с потерями в пограничном слое на задней стенке, имеем

$$Z_{12} = \frac{1+i}{c_0} (\gamma-1) h / \sin^2 kl +$$

$$+ \frac{1+i}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} [(\gamma-1) h k^2 + g k_n^2] 4J_1^2(k_n r_0) / (k_n r_0)^2 J_0^2(k_n a) b_p^2 \operatorname{sh}^2 b_p l. \quad (2)$$

Для импеданса Z_{13} , обусловленного потерями в пограничном слое на боковой поверхности резонатора, имеем

$$Z_{13} = \frac{2(1+i)}{c_0} \frac{1}{(kl)(kr_0)} [(\gamma-1) h + g] \left[\frac{J_1(kr_0)}{J_1(ka)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^4 I_1(v_m r_0)}{v_m^4 I_1(v_m a)} \right] -$$

$$- \frac{4(1+i)}{c_0} \frac{1}{(kl)(kr_0)} \frac{J_1(kr_0)}{J_1(ka)} \sum_{n=1}^{\infty} [k^2(\gamma-1) h - g b_p^2] \{ J_1(k_n r_0) / b_p^2 (k_n r_0) J_0(k_n a) \} +$$

$$(3)$$

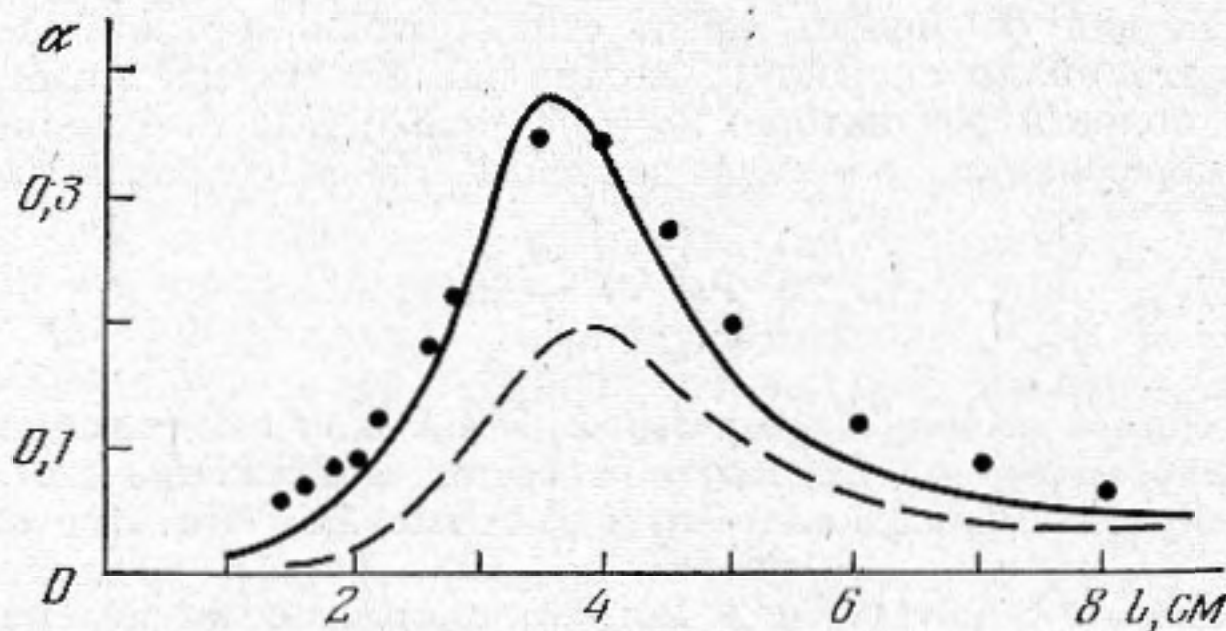
$$+ \frac{8(1+i)}{c_0(kl)(kr_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [k^2(\gamma-1)h - gb_p^2] \frac{k^2}{v_m^2} \frac{I_1(v_m r_0)}{I_1(v_m a)} \frac{J_1(k_n r_0)}{k_n J_0(k_n a)} \frac{1}{(\pi m/l)^2 + b_p^2},$$

где $v_m = \sqrt{(\pi m/l)^2 - k^2}$, $I_1(\eta)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го порядка от чисто мнимого аргумента.

Из выражений (1)–(3) видно, что импеданс, обусловленный вязкостью и теплопроводностью среды, имеет как мнимую, так и действительную части, которые равны между собой.

Мнимая часть Z_1 представляет собой добавку порядка ϵ к чисто мнимому импедансу в нулевом приближении Z_0 . Наличие вязкости и теплопроводности, таким образом, приводит к некоторому понижению резонансной частоты резонатора. Наличие $\text{Re } Z_1 \neq 0$ означает, что наряду с активной частью импеданса, обусловленной потерями в отверстии, существует и активная составляющая импеданса, определяемая потерями в полости резонатора.

Полный входной импеданс резонатора складывается из импеданса полости $Z_{\text{п}}$, импеданса отверстия $Z_{\text{отв}}$, который может быть рассчитан по формуле Крендалла [7]



(отверстие рассматривается как трубка длины t , где t — толщина передней панели резонатора), и $Z_{\text{л}}$ — величины, связанной с присоединенной массой с внешней стороны отверстия (см. [5]), и с потерями в пограничном слое на лицевой поверхности передней панели резонатора, вклад которых в $Z_{\text{л}}$ можно получить из (5), если $l \rightarrow \infty$.

Величина входного импеданса, обусловленного вязкостью и теплопроводностью, сложным образом зависит от ряда параметров. В частности, зависимость Z_{11} от глубины полости l выражается множителями $\text{ctg}^2 kl$, $\text{ctg } kl$, $\text{ctg } b_p l$ и $\text{ctg}^2 b_p l$. Следовательно, при уменьшении глубины полости величина Z_{11} возрастает. Также при $kl \ll 1$, $|Z_{12}| \sim l^{-2}$. Что касается величины Z_{13} , то при малых глубинах полости она возрастает при уменьшении l как l^{-1} .

На фигуре приведены графики зависимости коэффициента звукопоглощения α (α — отношение энергии поглощенной к падающей) резонатора от глубины его полости l .

Видно, что имеется согласие расчетных результатов (сплошная линия) с данными эксперимента (точки). Сравнение с величиной α , вычисленной без учета вязкости и теплопроводности в полости резонатора (пунктирная линия), показывает, что пренебрежение вязкими и тепловыми потерями в полости может привести к серьезным ошибкам в определении коэффициента поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Велижанина К. А., Вощукова Е. А., Свирина Л. Д. Влияние потерь в объеме резонатора на его акустические характеристики. — Акуст. журн., 1985, т. 31, № 3, с. 386–388.
2. Константинов Б. П. Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде. Л.: Наука, 1974.
3. Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Асимптотическое решение линеаризованной задачи о распространении звука в ограниченной среде с малой вязкостью. — Всесоюз. конф. по асимптотическим методам. Алма-Ата: Наука, 1979, с. 42.
4. Велижанина К. А., Вощукова Е. А., Нефедов Н. Н. Расчет входного импеданса некоторых типов резонаторов. Деп. в ВИНТИ 13 сент. 1984 г., № 6236–84.
5. Ingard U. On the radiation of sound into a circular tube, with an application to resonators. — J. Acoustic. Soc. Amer., 1953, v. 25, p. 1037.
6. Велижанина К. А., Оборотов В. А. Влияние глубины полости резонатора на его акустические свойства. — Акуст. журн., 1979, т. 25, № 5, с. 661–665.
7. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960, с. 168.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет

Поступило в редакцию
21.I.1985