АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 5

УДК 534.16

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНАХ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛОВ

Косевич Ю. А., Сыркин Е. С.

Исследованы дисперсионные соотношения упругих волн Лэмба в пластинах слоистых кристаллов. Отмечена возможность существенного изменения дисперсии упругих волн в зависимости от ориентации пластины и волнового вектора относительно кристаллографических осей. Обнаружен интервал длин волн, в котором низкочастотная поперечная волна является фактически бездисперсионной и замедленной.

Широкий класс веществ, характеризующихся сильной анизотропией упругих модулей, является весьма перспективным как для фундаментальных исследований по физике твердого тела, так и для технологических приложений [1]. Особый интерес вызывают исследования поверхностных волн в таких структурах. Так, в сильно анизотропных кристаллах скорость рэлеевских волн значительно уменьшается, глубина их проникновения в среду заметно возрастает по сравнению с длиной волны, поляризация этих волн становится почти линейной (вертикальной) [2]. Аналогичная модификация волн Рэлея наблюдается и в сегнетоэлектриках вблизи фазового перехода [3—5]. Существенное изменение свойств поверхностных акустических волн происходит также и в случае волн Лява, распространяющихся в пленке слоистого кристалла на изотропной подложке [6] и в системе пленка — подложка в окрестности структурного фазового перехода пленки [7].

К еще одному типу упругих волн, нашедшему обширную область применения, относятся упругие волны, распространяющиеся в пластинах,— волны Лэмба [8]. Для случаев анизотропных сред, в частности пластин гексагональных кристаллов, эти волны изучались в работах [9, 10]. Следует ожидать, что, как и в примере волн Рэлея и Лява, наличие сильной анизотропии должно существенно модифицировать волны Лэмба. Причем сильная анизотропия упругих свойств присуща слоистым кристаллам (например, графиту) в достаточно широком температурном диапазоне, а в кристаллах, испытывающих структурный фазовый переход, возникает вблизи температуры перехода [11]. Настоящая работа посвящена изучению особенностей распространения упругих волн Лэмба в пластинах сильно анизотропных кристаллов.

Рассмотрим для конкретности пластину гексагонального кристалла с модулями упругости C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{44} и C_{66}. Пусть OZ направлена вдоль оси шестого порядка, а оси X и Y — в базисной плоскости, плоскость $Z=0$ совпадает со срединной плоскостью пластины, а $Z=\pm h/2$ — внешние границы пластины. При такой ориентации (будем обозначать ее 1) пластина изотропна в своей плоскости. Направим ось X вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$ волны. В этом случае для смещений вида $u_i=u_i^0 \exp(\gamma kz) \exp[i(kx-\omega t)]$ дисперсионные соотношения волн Лэмба имеют вид

$$\operatorname{th}\gamma_2\frac{kh}{2}\operatorname{cth}\frac{\gamma_1 kh}{2}=\left[\frac{C_{33}\gamma_2+iC_{13}\Gamma_2}{C_{33}\gamma_1+iC_{13}\Gamma_1}\,\frac{i+\Gamma_1\gamma_1}{i+\Gamma_2\gamma_2}\right]^{\pm 1}, \tag{1}$$

где знак плюс в показателе относится к симметричной, а минус — антисимметричной волнам. Величины Γ_1 и Γ_2 ($\Gamma=u_x/u_z$) находятся как собст-

венные векторы объемных уравнений движения, соответствующие собственным значениям γ_1 и γ_2:

$$\Gamma_1 = i\,\frac{\rho\,\dfrac{\omega^2}{k^2} + C_{33}\gamma_1^2 - C_{44}}{\gamma_1\,(C_{13}+C_{44})}\,; \quad \Gamma_2 = -\frac{i\gamma_2\,(C_{13}+C_{44})}{\rho\omega^2/k^2 - C_{11} + C_{44}\gamma_2^2}\,, \qquad (2)$$

ρ — плотность кристалла, ω — частота волны.

Исследуем выражение (1) применительно к сильно анизотропным кристаллам, для которых будем считать, что

$$\frac{C_{33}}{C_{11}} \sim \frac{C_{13}}{C_{11}} \sim \frac{C_{44}}{C_{11}} = \eta \ll 1, \quad C_{33} - C_{44} \sim \eta C_{11} \qquad (3)$$

(например, для графита $C_{44}/C_{11} \approx 0{,}004$).

В первом неисчезающем по малому параметру η приближении справедливы выражения

$$\gamma_1^2 = \frac{C_{11} - \rho\omega^2/k^2}{C_{44}}\,; \quad \gamma_2^2 = \frac{C_{44} - \rho\omega^2/k^2}{C_{33}}\,. \qquad (4)$$

В пределе $kh \to 0$ для симметричной волны получаем закон дисперсии

$$\omega^2 = (k^2/\rho)\,(C_{11} - C_{13}^2/C_{33}) \qquad (5)$$

(продольная волна), а для антисимметричной [1]

$$\omega^2 = \frac{k^4h^2}{12\rho}\,C_{11}. \qquad (6)$$

Из соотношений (4–6) видно, что для продольных волн $|\gamma_1| \sim \sim \sqrt{C_{13}^2/(C_{33}C_{44})} \sim 1$, $|\gamma_2| \sim \sqrt{C_{11}/C_{33}} \sim 1/\sqrt{\eta} \gg 1$, а для поперечных $|\gamma_1| \sim \sim \sqrt{C_{11}/C_{44}} \sim 1/\sqrt{\eta}$, $|\gamma_2| \sim \sqrt{C_{44}/C_{33}} \sim 1$. Поэтому продольная волна (5) является бездисперсионной, а изгибная волна (6) имеет квадратичный закон дисперсии только при $kh \ll \sqrt{\eta} \ll 1$, а не при $kh \ll 1$, как в случае пластины изотропного твердого тела.

Выпишем закон дисперсии для низшей моды волны Лэмба в пределе $kh \to \infty$

$$\omega^2 = \frac{k^2C_{44}}{\rho}\left(1 - \frac{C_{44}^2}{C_{11}C_{33}}\right). \qquad (7)$$

Полученное выражение совпадает с дисперсионным соотношением для волны Рэлея на поверхности (001) сильно анизотропного гексагонального кристалла [2]. Для этой волны $|\gamma_1| \approx \sqrt{C_{11}/C_{44}} \sim 1/\sqrt{\eta}$, $\gamma_2 \approx \sqrt{C_{44}^3/(C_{11}C_{33}^2)} \sim \sqrt{\eta}$, т. е. выход обеих низших мод (симметричной и антисимметричной) на волну Рэлея происходит при $kh \gg (1/\sqrt{\eta}) \gg 1$. В изотропном случае, как известно, переход к волнам Рэлея происходит при $kh \sim 1$.

На фиг. 1 изображены зависимости приведенных фазовых скоростей V_Φ/V_R низших мод от параметра kh ($V_\Phi = \omega/k$ — фазовая скорость волны, V_R — скорость рэлеевской волны). Обращает на себя внимание существование интервала

$$\sqrt{\eta} \ll kh \ll 1/\sqrt{\eta}, \qquad (8)$$

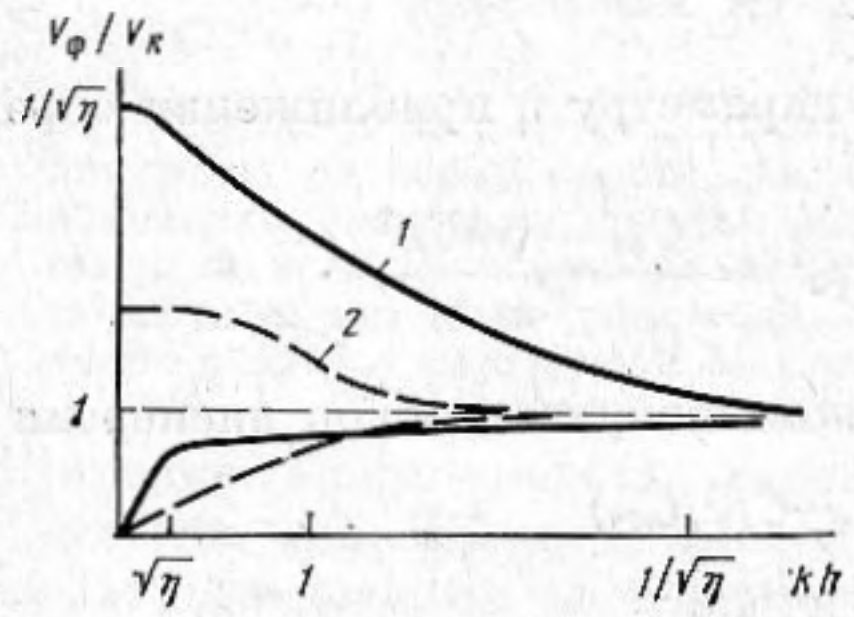
в котором скорость антисимметричной волны является замедленной и бездисперсионной, т. е. поперечная волна имеет звуковой характер: $\omega_a \approx \approx \sqrt{C_{44}/\rho}\,k$. При таких значениях kh эта волна в пластине не является изгибной (с квадратичным законом дисперсии), а также и не поверхностной рэлеевской. Существование бездисперсионных и замедленных поперечных

[1] Точные выражения для низших мод упругих колебаний пластины произвольного гексагонального кристалла как ориентации 1, так и ориентации 2 в пределе $kh \to 0$ приведены в работе [12].

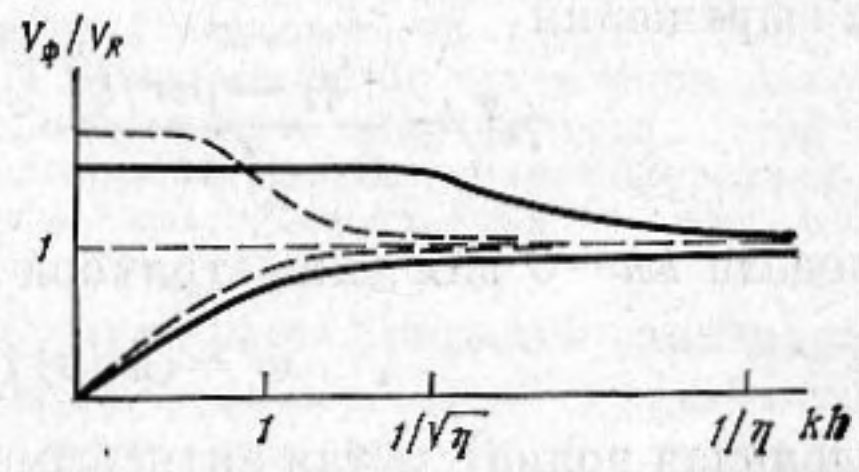
волн в пластинах возможно только при значительной анизотропии упругих модулей. Эта волна дает заметный вклад в низкотемпературную термодинамику пленок сильноанизотропных кристаллов [12].

Используя выражения (1), (3), нетрудно получить значения критических частот ω_n^{sa} появления новых мод: $\omega_{n1}^s=(\pi/h)\sqrt{C_{33}/\rho}2n$; $\omega_{n1}^a=(\pi/h)\sqrt{C_{44}/\rho}2n$, $\omega_{n2}^s=(\pi/h)\sqrt{C_{44}/\rho}(2n-1)$; $\omega_{n2}^a=(\pi/h)\sqrt{C_{33}/\rho}(2n-1)$; $n=1, 2\ldots$ (индекс s относится к симметричной, индекс a – антисимметричной).

Предельное значение фазовой скорости каждой из этих мод равно $\sqrt{C_{44}/\rho}$ и переход к этому значению для n-й моды происходит при $kh\gg 2\pi n$. Отметим, что для рассматриваемой ориентации все критические частоты определяются малыми модулями упругости.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимости фазовых скоростей низших мод волн Лэмба от параметра kh для пластины ориентации 1 (*1* – соответствуют пластине сильно анизотропного кристалла, *2* – изотропному твердому телу)

Фиг. 2. Зависимости фазовых скоростей низших мод волн Лэмба от параметра kh для пластины ориентации 2 и направления волнового вектора вдоль оси шестого порядка

Рассмотрим теперь случай, когда пластинка ограничена плоскостями типа (100) – ориентация 2. Пластина с такой ориентацией обладает максимальной анизотропией в своей плоскости.

Направим волновой вектор волны вдоль оси Z. При такой геометрии для смещений типа $u_i=u_i^0\exp(\gamma kx)\exp[i(kz-\omega t)]$ дисперсионные соотношения волн Лэмба можно получить из (1) и (2) заменой C_{11} на C_{33} и u_x на u_z. Полученные при этом соотношения будут соответствовать аналогичным соотношениям работы [9]. В случае сильно анизотропного кристалла в главном приближении по параметру анизотропии выражения для γ_1 и γ_2 имеют вид

$$\gamma_1^2=\frac{C_{44}-\rho\omega^2/k^2}{C_{11}},\quad \gamma_2^2=\frac{C_{33}-\rho\omega^2k^2}{C_{44}}. \tag{9}$$

Выпишем законы дисперсии низших мод для рассматриваемой геометрии при $kh\to 0$, (продольная волна (10) и поперечная (11))

$$\omega^2=(k^2/\rho)(C_{33}-C_{13}^2/C_{11}), \tag{10}$$

$$\omega^2=k^4h^2C_{33}/(12\rho). \tag{11}$$

Из этих соотношений для γ_1 и γ_2 получаем следующие оценки: продольная волна $|\gamma_1|\approx\sqrt{(C_{33}-C_{44})/C_{11}}\sim\sqrt{\eta}$; $|\gamma_2|=\sqrt{C_{13}^2/(C_{11}C_{44})}\sim\sqrt{\eta}$, поперечная волна $|\gamma_1|\approx\sqrt{C_{44}/C_{11}}=\sqrt{\eta}$, $|\gamma_2|\approx\sqrt{C_{33}/C_{44}}\sim 1$. Продольная волна (10) является бездисперсионной при $kh\ll 1/\sqrt{\eta}$, изгибная волна (11) имеет квадратичный закон дисперсии при $kh\ll 1$. В пределе $kh\to\infty$ получаем закон дисперсии рэлеевских волн

$$\omega^2=\frac{k^2C_{44}}{\rho}\left[1-\frac{C_{44}^2}{(C_{33}-C_{44})C_{11}}\right].$$

В этом случае

$$\gamma_1 \approx \sqrt{\frac{C_{44}^3}{C_{11}^2(C_{33}-C_{44})}} \sim \eta, \quad \gamma_2 \approx \sqrt{\frac{C_{33}-C_{44}}{C_{44}}} \sim 1$$

т. е. выход на рэлеевскую волну происходит при $kh \gg 1/\eta$, а следовательно, гораздо позже, чем для ориентации 1 и тем более изотропного случая.

На фиг. 2 изображены зависимости приведенных фазовых скоростей $V_ф/V_R$ от параметра kh для пластины ориентации 2. Отметим, что и при такой геометрии можно выделить интервал значений kh

$$1 \ll kh \ll 1/\eta, \tag{12}$$

в котором антисимметричная волна является бездисперсионной ($\omega_a \approx \approx \sqrt{C_{44}/\rho}k$) не будучи поверхностной. В изотропном твердом теле ($\eta \approx 1$) как интервал (8), так и интервал (12) отсутствуют. Обращает на себя внимание существенная модификация по сравнению с изотропным случаем и продольной волны. Так, в интервале $1 \ll kh \ll 1/\sqrt{\eta}$ дисперсия продольной волны ослаблена.

Критические частоты $\omega_n^{s,a}$ имеют следующий вид:

$$\omega_{n1}^s = \frac{2n\pi}{h}\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad \omega_{n1}^a \simeq \frac{2n\pi}{h}\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}},$$

$$\omega_{n2}^s = \frac{(2n-1)\pi}{h}\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad \omega_{n2}^a = \frac{(2n-1)\pi}{h}\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}.$$

Предельная скорость этих мод, как и в случае ориентации 1, равна $\sqrt{C_{44}/\rho}$. Значения критических частот определяются как большим модулем упругости C_{11}, так и малым C_{44}, поэтому переход к предельной скорости ветвей ω_{n2}^s и ω_{n1}^a происходит при $kh \gg 2\pi n$, а ветвей ω_{n1}^s и ω_{n2}^a при $kh \gg \gg 2\pi n/\sqrt{\eta}$.

Аналогичным образом можно рассмотреть поверхностные акустические волны в пластине ориентации 2 с волновым вектором вдоль сил Y. В этом случае волны Лэмба совпадают с таковыми в пластине изотропного твердого тела при $V_l = \sqrt{C_{11}/\rho}$, $V_t = \sqrt{C_{66}/\rho}$, где V_l и V_t — продольные и поперечные скорости в изотропном теле.

Итак, на примере пластины ориентации 2 можно проследить за изменением свойств упругих волн при переходе от сильно анизотропных кристаллов к изотропному твердому телу. Отметим, что при малых отклонениях направления распространения от оси Z характерные свойства волны существенно не меняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берча Д. М., Ворошилов Ю. В., Сливка В. Ю., Туряница И. Д.* Сложные халькогениды и халькогалогениды. Львов, Вища школа, 1983. 182 с.
2. *Гельфгат И. М., Сыркин Е. С.* Поверхностные волны в слоистом кристалле.– Физ. низк. темпер., 1978, т. 4, № 5, с. 672–674.
3. *Герус С. В., Дикштейн И. Е., Тарасенко В. В., Харитонов В. Д.* Волны Рэлея в сегнетоэлектрических кристаллах с пьезоэффектом.– ФТТ, 1977, т. 19, № 1 с. 218–222.
4. *Борщан В. С., Мануилов М. В., Сердобольская О. Ю.* Рэлеевские волны в одноосных сегнетоэлектриках вблизи фазовых переходов.– ФТТ, 1982, т. 24, № 3, с. 932–935.
5. *Борщан В. С., Мануилов М. В., Подгорнов П. А., Сердобольская О. Ю., Солодов И. Ю.* Исследование эллиптичности поверхностной акустической волны вблизи фазового перехода в сегнетовой соли электродинамическим методом.– ФТТ, 1982, т. 24, № 9, с. 2574–2577.
6. *Гельфгат И. М., Сыркин Е. С.* Поверхностные акустические волны в сильно анизотропной пленке на изотропной подложке.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 1, с. 19–22.

7. *Сыркин Е. С., Гельфгат И. М.* Замедление поверхностных акустических волн в системе пленка – подложка в окрестности структурного фазового перехода пленки.– Поверхность, физика, химия, механика, 1982, т. 1, № 8, с. 28–29.
8. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
9. *Кучеров И. Я., Островский И. В.* Нормальные волны в пластинках кристаллов симметрии C_{6v}.– Укр. физ. журн., 1970, т. 15, № 7, с. 1155–1163.
10. *Альшиц В. И., Лоте Е., Любимов В. Н.* Поверхностные и особые объемные упругие волны в пластине гексагонального кристалла.– Кристаллография, 1983, т. 28, № 4, с. 635–641.
11. *Kragler R.* Softening of surface phonons in the (100) plane of Nb_3Sn.– Solid State Com., 1980, v. 35, № 5, p. 429–432.
12. *Косевич Ю. А., Сыркин Е. С.* О некоторых особенностях низкочастотных колебаний анизотропных пленок.– Физ. низк. темпер., 1983, т. 9, № 11, с. 1195–1199.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
10.IV.1984
после исправления
27.XI.1984