УДК 534.231.1

О НАХОЖДЕНИИ ФОРМЫ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТЕЛА ПО ЗАДАННОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Урусовский И. А.

Рассмотрим задачу восстановления формы осциллирующего тела по амплитудной высокочастотной характеристике направленности его излучения. Полагая радиусы кривизны тела большими по сравнению с длиной волны излучения, ограничимся случаем гладкого выпуклого осесимметричного тела вращения, осциллирующего вдоль своей оси, а для плоской задачи – гладкого выпуклого цилиндра, осциллирующего в перпендикулярном к оси цилиндра направлении. Эти случаи соответствуют характеристике направленности звукового давления, зависящей только от одного угла θ между направлением осцилляций и направлением в удаленную точку наблюдения, проведенным перпендикулярно к поверхности тела.

Учитывая, что нормальная составляющая колебательной скорости на осциллирующей поверхности пропорциональна $\cos\theta$, амплитуду звукового давления в дальней зоне можно представить для этих двух случаев соответственно в виде [1]

$$p=\frac{\rho c v\cos\theta}{r\sqrt{K}}\quad \text{и}\quad p=\frac{\rho c v\cos\theta}{\sqrt{\varkappa r}},\tag{1}$$

где v – амплитуда скорости осцилляций тела, r – расстояние от него до точки наблюдения, ρ – плотность среды, c – скорость звука в ней, K – гауссова кривизна поверхности тела вращения, $\varkappa$ – кривизна направляющей цилиндра. С другой стороны, амплитуда звукового давления в дальней зоне выражается через ее характеристику направленности $\Phi(\theta)$ в первом случае и $\varphi(\theta)$ во втором соответственно по формулам

$$p=\frac{\rho c v}{r\sqrt{K_0}}\Phi(\theta)\quad \text{и}\quad p=\frac{\rho c v}{\sqrt{\varkappa_0 r}}\varphi(\theta),\tag{2}$$

где K_0 и $\varkappa_0$ – соответственно значения K и $\varkappa$ при $\theta=0$ или какие-либо другие постоянные величины, определяемые нормировкой характеристики направленности. Из сравнения формул (1) и (2) найдем

$$\Phi(\theta)=\sqrt{\frac{K}{K_0}}\cos\theta,\qquad \varphi(\theta)=\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_0}}\cos\theta.\tag{3}$$

Для тела вращения, меридиональная кривая поверхности которого имеет вид $a=a(z)$, где a – радиус окружности сечения поверхности тела плоскостью $z=\text{const}$, z – координаты вдоль оси вращения, гауссова кривизна поверхности выражается формулой [2]

$$K=-\frac{d^2a}{dz^2}\Bigg/\left\{a(z)\left[1+\left(\frac{da}{dz}\right)^2\right]^2\right\}.\tag{4}$$

Учитывая, что

$$\frac{da}{d\theta}=\operatorname{ctg}\theta,\quad \frac{d^2a}{dz^2}=-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d\theta}{dz},\quad \frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{da}\frac{da}{dz}=\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{da},\tag{5}$$

из формул (3) и (4) получим

$$K=\frac{1}{a}\sin^2\theta\frac{d\theta}{dz}=\frac{1}{a}\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{da},\qquad a=\frac{1}{K_0}\Phi^2(\theta)\operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{da}.$$

Интегрируя последнее уравнение и уравнение (5), получим искомые выражения, дающие решение рассматриваемой обратной задачи:

$$a^2(\theta)=\frac{2}{K_0}\int_0^\theta \Phi^2(\chi)\operatorname{tg}\chi\,d\chi,\qquad z(\theta)=\frac{1}{K_0}\int_0^\theta\frac{1}{a(\chi)}\Phi^2(\chi)\operatorname{tg}^2\chi\,d\chi.$$

В частности, при $\Phi(\theta)\equiv1$ при $|\theta|<\pi/2$, эти выражения сводятся к виду

$$a(\theta)=\sqrt{-\frac{2}{K_0}\ln\cos\theta},\qquad z(\theta)=\int_0^\theta\frac{\operatorname{tg}^2\chi}{\sqrt{-2K_0\ln\cos\chi}}\,d\chi.$$

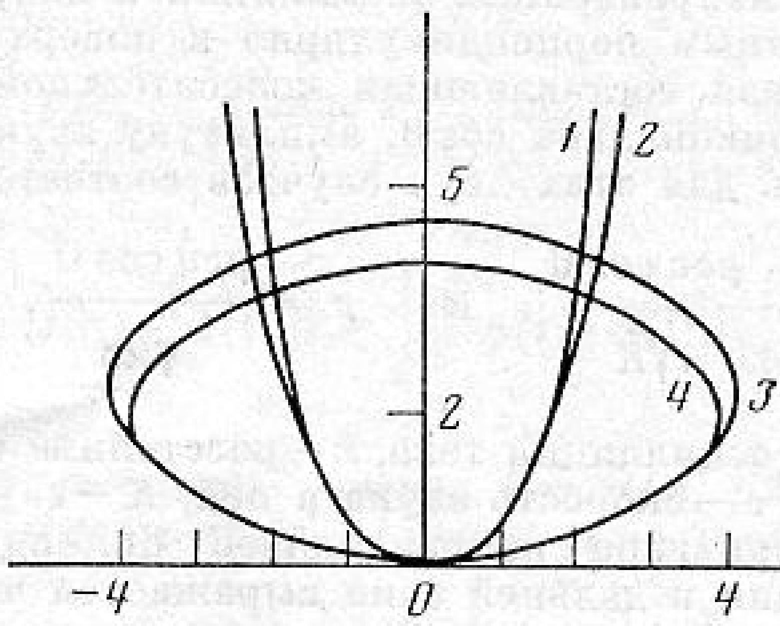
Первое из этих выражений эквивалентно формулам $\cos\theta=\exp(-K_0a^2/2)$, $\operatorname{tg}\theta=$ $=\sqrt{\exp(K_0a^2)-1}$, откуда, согласно формуле (5), найдем $z=\int\limits_0^a\sqrt{\exp(K_0\xi)^2-1}\,d\xi$.

Меридиональная кривая такой поверхности отмечена на фигуре индексом *1*. Случай $\Phi(\theta)=\cos\theta$ соответствует осцилляциям сферы, случай $\Phi(\theta)=\cos^2\theta$ – осцилляциям поверхности вращения, описываемой уравнениями

$$a^2(\theta)=(1-\cos^4\theta)/(2K_0),$$

$$z(\theta)=\frac{1}{\sqrt{K_0}}\left[1-\cos\theta\sqrt{\frac{1+\cos^2\theta}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta}}{1+\sqrt{2}}\right]$$

(меридиональная кривая *3* на фигуре).



Для цилиндрической поверхности с направляющей, имеющей вид $z=z(x)$, где x, z – ее декартовы координаты, а осцилляции происходят вдоль оси z, имеем

$$\varkappa=\frac{d^2z}{dx^2}\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{-3/2},\qquad \frac{dz}{dx}=\operatorname{tg}\theta.$$

Отсюда после простых преобразований получим:

$$\varkappa=\cos^3\theta\frac{d^2z}{dx^2},\qquad \frac{d}{d\theta}\frac{dz}{dx}=\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta},$$

$$\varkappa\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta,\qquad \varkappa\frac{dz}{d\theta}=\sin\theta.$$

Выразив $\varkappa$ через $\varphi(\theta)$ по формуле (3) и проведя интегрирование, найдем

$$x=\frac{1}{\varkappa_0}\int\limits_0^\theta\frac{1}{\cos\theta}\Phi^2(\theta)d\theta,\qquad z=\frac{1}{\varkappa_0}\int\limits_0^\theta\frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos\theta}\Phi^2(\theta)d\theta.$$

В частности, при $\varphi(\theta)\equiv1$ для $|\theta|<\pi/2$ эти выражения сводятся к виду

$$x=\frac{1}{\varkappa_0}\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta},\qquad z=\frac{1}{\varkappa_0}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right).$$

Отсюда получим $\sin\theta=\operatorname{th}\varkappa_0x$, $\cos\theta=1/\operatorname{ch}\varkappa_0x$, $dz/dx=\operatorname{tg}\theta=\operatorname{sh}\varkappa_0x$, $z=$ $=(1/\varkappa_0)(\operatorname{ch}\varkappa_0x-1)$. Соответствующая направляющая цилиндра представлена на фигуре кривой *2*. Случаю $\varphi(\theta)=\cos\theta$ соответствуют осцилляции кругового цилиндра, случаю $\varphi(\theta)=\cos^2\theta$ – осцилляции цилиндра, направляющая которого описывается уравнениями

$$x=\frac{1}{\varkappa_0}\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right),\qquad z=\frac{1}{3\varkappa_0}(1-\cos^3\theta)$$

и представлена на фигуре кривой *4*.

В общем случае более острой характеристике направленности соответствует более сплюснутая форма осциллирующего тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дреков В. Н.* Исследование коротковолновой асимптотики акустического поля излучающей поверхности.– Докл. VI Всесоюз. Акуст. конф., секция А. М.: АКИН, 1968.
2. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей, ч. 1. М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
29.VI.1984