УДК 534.222

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВ, КОАГУЛИРУЮЩИХ В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ

Максимов А. О.

Звуковая волна, распространяющаяся в жидкости с пузырьками газа изменяет характеристики самой среды [1]. Пузырьки под действием сил радиационного давления внешнего поля совершают упорядоченное движение и взаимодействуют друг с другом посредством перерассеянного поля [2, 3]. Притяжение за счет сил Беркнеса приводит к коагуляции пузырьков. Изменение распределения пузырьков по радиусам n ($\mathbf{r}$, t, R) в данной точке $\mathbf{r}$ в момент времени t описывается кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div}(\mathbf{U}n)=-I(n);\qquad I(n)=I_-+I_+,\tag{1}$$

$$I_-(n)=\int_0^\infty dR'\sigma(R,R')\,|\mathbf{U}(R)-U(\mathbf{R}')\,|\,n(R)\,n(R'),$$

$$I_+(n)={}^1/_2\int_0^R dR'\;\sigma(R',R'')\,|\mathbf{U}(R')-\mathbf{U}(R'')\,|\,R^2/R''^2n(R')\,n(R'');$$

здесь R – радиус пузырька, $\mathbf{U}$ – скорость поступательного движения: $\mathbf{U}=\mathbf{U}_0-(1-s^2)\times\times[(1-s^2)^2+\delta^2]^{-1}(6\nu)^{-1}[\Psi\nabla\Psi^*+\Psi^*\nabla\Psi]-i\delta(6\nu)^{-1}[(1-s^2)^2+\delta^2][\Psi\nabla\Psi^*-\Psi^*\nabla\Psi]$, U_0 – скорость пузырька в отсутствие поля; $s\equiv\omega_0/\omega$; ω_0, δ – собственная частота и постоянная затухания пузырька, ω, Ψ – частота и потенциал внешнего поля, ν – кинематическая вязкость, σ – сечение столкновения пузырьков, согласно [4] $\sigma|\mathbf{U}_1-\mathbf{U}_2|=4\pi k$ при $k\geqslant0$ и 0 при $k<0$, $k=(R_1+R_2)(3\nu)^{-1}[(s_1^2-1)(s_2^2-1)+\delta_1\delta_2][(s_1^2-1)^2+\delta_1^2]^{-1}\times|\Psi|^2[(s_2^2-1)^2+\delta_2^2]^{-1}$. Уравнение (1) получено в работе [5], однако слагаемое интеграла столкновений I_+ содержало ряд неточностей. Отсутствовали множитель R^2/R''^2, возникающий при интегрировании плотности вероятности появления пузырька радиуса R в результате слияния пузырьков с радиусами R' и R'' $(4\pi R^2\delta(4\pi/3R^3-4\pi/3R'^3-4\pi/3R''^3))$ и сомножитель $^1/_2$, обеспечивающий однократный учет процесса $R'+R''\to R$. Отметим, что выражение для I_+ в (1) согласуется с результатами работы [6], в которой получено кинетическое уравнение для пузырьков, коагулирующих за счет гидродинамических сил.

Традиционной методикой исследования сил Бьеркнеса является изучение динамики пузырьков в поле стоячей волны [7–9]. При этом пузырьки с размером, меньшим резонансного (собственная частота монопольных колебаний резонансного пузырька совпадает с частотой внешнего поля $\omega_0(R_*)=\omega$), собираются в окрестности пучности поля – области, где сила радиационного давления стоячей волны уравновешивает силу плавучести. Поскольку для дорезонансных пузырьков $R<R_*$ положение равновесия слабо зависит от радиуса, в окрестности пучности плотность пузырьков может быть велика и поэтому следует учитывать их взаимодействия. В результате коагуляции в пелене будут появляться пузырьки больших размеров вплоть до резонансного. Для зарезонансных пузырьков $R>R_*$ меняется знак силы радиационного давления, и такие пузырьки покидают пелену. Процесс будет стационарным при генерации пузырьков малого размера, создаваемых, например, путем электролиза воды на тонких электродах. В уравнение (1) при этом нужно ввести плотность источника $S(r,\,R)$, локализованного в пространстве размеров вблизи R_0 $(R_0\ll R_*)$. При описании этой ситуации естественно выделяются три области характерных размеров: источник $R\sim R_0(S(\mathbf{r},\,R)-I(n)=\operatorname{div}(\mathbf{U}n))$, сток $R\sim R_*(\operatorname{div}(\mathbf{U}n)=-I(n))$ и инерционный интервал $R_0\ll R\ll R_*(I(n)=0)$.

Покажем, следуя [10], что симметрия (однородность) оператора столкновений позволяет найти точное решение нелинейного интегрального уравнения $I(n)=0$. В инерционном интервале $s\gg1$, поэтому ядро интеграла столкновений может быть записано в упрощенном виде: $w(R_1,\,R_2)\equiv\sigma(R_1,\,R_2)\,|\mathbf{U}_1-\mathbf{U}_2|\simeq(4\pi/3\nu)\,(R_1+R_2)\times\times s_1^{-2}s_2^{-2}|\Psi|^2$. Рассмотрим подобные процессы $R'+R''\to R$ и $R+Q'\to Q''$, причем $Q'=g_1R''$, $Q''=g_1R=g_1^2R'$, $g_1=R/R'$, для них имеем:

$$I_-(n)=\int_0^\infty dQ'w(R,Q')\,n(R)\,n(Q')=\int_0^\infty dQ'\int_0^\infty dQ''w(R,Q')\times$$

$$\times\,n(R)\,n(Q')\,3Q''^2\delta(Q''^3-Q'^3-R^3)=\int_0^\infty dR'\int_0^\infty dR''g_1^3w(R',R'')\times$$

$$\times\,g_1n(g_1R')\,n(g_1R'')\,3R'^2g_1^4g_1^{-3}\delta(R^3-R'^3-R''^3)=$$

$$= \int\limits_0^R dR' w(R', R'') n(g_1R') n(g_1R'') g_1^3 R^2/R''^2,$$

аналогично для $Q' = g_2R'$, $Q'' = g_2R = g^2R''$, $g_2 = R/R''$

$$I_-(n) = \int\limits_0^R dR' w(R', R'') n(g_2R') n(g_2R'') g_2^3 R^2/R''^2.$$

В результате интеграл столкновений можно представить в факторизованном виде

$$I(n) = -{}^1/_2 \int\limits_0^R dR' w(R', R'') R^2/R''^2 [n(R') n(R'') - g_1^3 n(g_1R') n(g_1R'') - g_2^3 n(g_2R') n(g_2R'')]. \tag{2}$$

Для степенных распределений $n(R) = n_0(R_0/R)^\alpha$ выражение в квадратных скобках (2) пропорционально $[1-(R/R')^{3-2\alpha}-(R/R'')^{3-2\alpha}]$. Условие сохранения объема газа при коагуляции пузырьков определяет показатель степени $\alpha=3$. Полученному решению отвечает постоянный поток по спектру размеров. Множитель n_0 определяется из сшивки с решением в окрестности источника. По порядку величины имеем $n_0 \sim (S(R_0)\nu/|\Psi|^2)^{1/2}(s_1^2/R_1)$.

Следует отметить, что для данного распределения наиболее интенсивно идут процессы с участием пузырьков малого размера, однако при этом «уходы» и «приходы» в интеграле столкновений компенсируют друг друга. В результате распределение пузырьков по радиусам формируется за счет коагуляции пузырьков сравнимых размеров, что оправдывает предположение о существовании инерционного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М.* Эффект самопросветления для акустических волн в жидкости с пузырьками газа.– Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, № 7, с. 423–425.
2. *Bjerknes C. A.* Hydrodynamische Fernkrafte. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1915, p. 161–175.
3. *Алексеев В. Н.* К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 2, с. 129–136.
4. *Кобелев Ю. А.* Нелинейные дипольные колебания сферической частицы в звуковом поле.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 6, с. 783–789.
5. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А.* Коллективное самовоздействие звука в жидкости с пузырьками газа.– Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 37, № 1, с. 5–8.
6. *Головин А. М., Петров А. Г.* О спектре коагулирующих пузырей в жидкости малой вязкости.– МЖГ, 1970, № 4, с. 130–136.
7. *Eller A.* Force on a bubble in a standing acoustic wave.– JASA, 1968, v. 43, No 1, p. 170–171.
8. *Crum L. A.* Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field.– JASA, 1975, v. 43, No6, part 1, p. 1363–1370.
9. *Crum L. A., Procperetti A.* Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids: An interpretation of some experimental results.– JASA, 1983, v. 73, No 1, p. 121–127.
10. *Кац А. В., Конторович В. М.* Свойства симметрии интеграла столкновений.– ЖЭТФ, 1973, т. 64, № 1, с. 153–163.

Тихоокеанский океанологический институт ДВНЦ АН СССР

Поступило в редакцию 17.VII.1984

УДК 534.2:532

ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ РАСШИРЯЮЩИМСЯ ЦИЛИНДРОМ

Петухов Ю. В.

В работе [1] на примере точно решаемой задачи о расширении сферического поршня в воздухе проведены сравнения для поля давления и скорости с соответствующими характеристиками, вычисленными с использованием приближенного метода Кирквуда – Бете [2]. В целях дальнейшего выяснения погрешностей, которые возникают при использовании указанного приближения для описания процессов генерации ударных волн цилиндрической симметрии, с которыми чаще всего приходится иметь дело при электрогидравлическом способе возбуждения, ниже рассмотрена задача о расширении цилиндрического поршня.