

следовательных трехволновых процессов (9) с амплитудой волны, являющейся результатом трехфононных процессов [11]. Отношение этих амплитуд будет величиной порядка $\mathcal{L} \Phi^{(0)} k^2 a$. Сделаем оценки этой величины для кристаллов $\text{LiNbO}_3 : \text{Fe}$, в которых напряженность электрического поля структуры $E^{(0)}$ достигает значений $10^7 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$ [4–6]. Для этих кристаллов значения коэффициентов $e^* \sim 10 \text{ Кул} \cdot \text{м}^{-2}$, $C \sim 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$. При $k = 10^5 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$ (что соответствует частоте $f \sim 100 \text{ МГц}$), $a = 10^{-2} \text{ м}$ и $E^{(0)} = 10^6 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$ величина $\mathcal{L} \Phi^{(0)} k^2 a \sim 0,1$, поэтому последовательные трехволновые процессы будут эффективными для их наблюдения и измерений. Отметим, что выбранные для оценок величины не являются предельными, так как использованное приближение заданного поля предполагает, что амплитуды волн, являющиеся результатом двух последовательных трехволновых взаимодействий (9), значительно меньше амплитуд волн при однократном трехволновом процессе. Понятно, что для больших значений таких параметров, как волновое число, напряженность электрического поля, пройденное волной расстояние существует реальная возможность увеличения эффективности рассмотренных взаимодействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Элаши Ш. Волны в активных и пассивных периодических структурах. — ТИИЭР, 1976, т. 64, № 12, с. 22–59.
2. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
3. Ахманов С. А., Ляхов Г. А., Руденко О. В., Шмальгаузен В. И. Параметрические взаимодействия акустических волн в периодически неоднородных средах. — Письма в ЖТФ, 1975, т. 1, № 13, с. 632–636.
4. Фридкин В. М. Фотосегнетоэлектрики. М.: Наука, 1979.
5. Марков В. Б., Одулов С. Г., Соскин М. С. Запись фазовых голограмм в кристаллах ниобата лития. — В кн.: Регистрирующие среды для голографии. Л.: Наука, 1975, с. 127–134.
6. Alig R. C. Acoustic diffraction and the electrostrictive transducer. — J. Appl. Phys., 1975, v. 46, № 9, p. 3731–3737
7. Пятаков П. А. Генерация поверхностной акустической волны на фотоиндуцированной решетке в переменном электрическом поле. — Акуст. журн., 1981, т. 27, № 6, с. 919–923.
8. Барышникова Л. Ф. Взаимодействия акустических волн в пьезодиэлектрических кристаллах с фоторефрактивной структурой. — Сб. Вопросы электроники СВЧ. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1983, с. 17–19.
9. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
10. Барышникова Л. Ф., Лямов В. Е. Генерация гармоник в пьезокристаллах при действии однородных внешних полей. — Акуст. журн., 1978, т. 24, № 4, с. 465–472.
11. Барышникова Л. Ф. Ориентационная зависимость эффективности взаимодействий объемных акустических волн в кристаллах. — В кн.: Вопросы судостроения. М.: ЦНИИ Румб, 1979, № 12, с. 35–43.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева

Поступило в редакцию
1 II 1984

УДК 532.529

О РАСЧЕТЕ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

Бескаравайный Н. М., Ковалев В. Г., Поздеев В. А.

Рассмотрим распространение плоской нестационарной волны сжатия в газожидкостной среде, определяющее уравнение которой получено в [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \Phi(x, \tau) G(t - \tau) d\tau,$$

$$G(\tau) = \frac{3\epsilon c_0^2}{R_0^2} \exp\left(-\frac{2\mu}{R_0^2 \rho_0} \tau\right) \sin \omega_1 \tau; \quad (1)$$

$$\omega_1 = \left(\omega_0^2 + \frac{3\epsilon c_0^2}{R_0^2}\right)^{1/2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{R_0} \left(\frac{3\gamma P_0}{\rho_0}\right)^{1/2}.$$

Здесь Φ — потенциал скорости, c_0 — скорость звука в жидкой компоненте, ϵ — начальное объемное газосодержание, R_0 и ω_0 — равновесный радиус пузырька и резонансная частота соответственно, μ — коэффициент кинематической вязкости жидкой компоненты, ρ_0 — начальная плотность смеси, P_0 — гидростатическое давление, γ — показатель адиабаты газовой компоненты.

Рассмотрим наиболее распространенный и практически важный случай маловязкой жидкой компоненты (вода, фреон). Положим $\mu = 0$.

С помощью преобразований Лапласа найдем в области изображения решение уравнения (1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, условию излучения и краевому условию вида

$$p|_{x=0} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{x=0} = P_0(t).$$

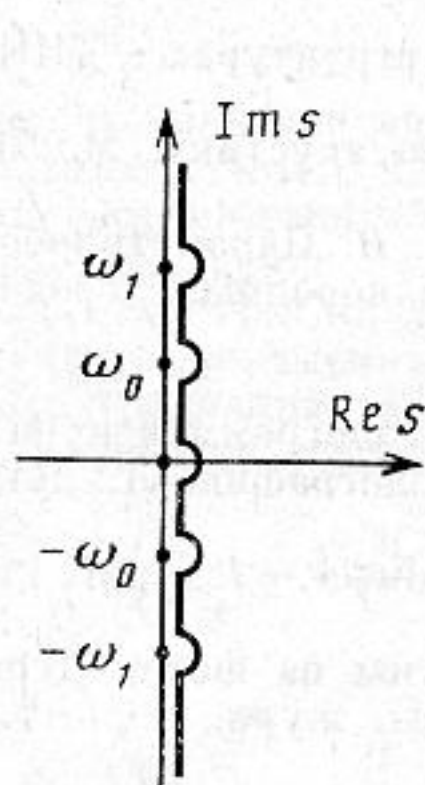
В результате получим

$$\Phi^L(x, s) = -\frac{1}{\rho_0} P_0^L(s) F^L(x, s), \quad (2)$$

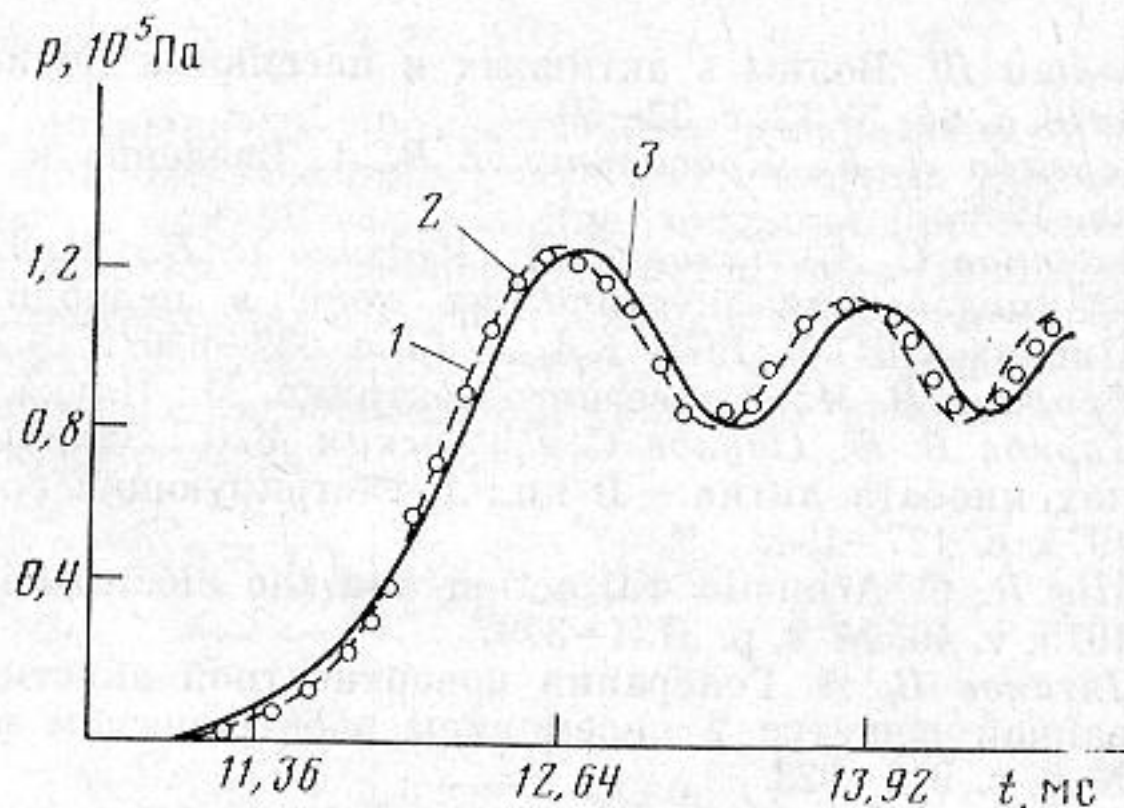
$$F^L(x, s) = \frac{1}{s} \exp \left\{ -\frac{sx}{c_0} \sqrt{\frac{s^2 + \omega_1^2}{s^2 + \omega_0^2}} \right\}, \quad (3)$$

где s — параметр преобразования Лапласа, индексом L обозначена трансформанта преобразования.

Оригинал (2) может быть выражен сверткой оригиналов $p_0(t)$ и $F(x, t)$ функции $F^L(x, s)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Контур интегрирования

Фиг. 2. Структура волны сжатия в жидкости с пузырьками CO_2 . $x=1,35$ м; $P_0=0,115$ МПа; $\epsilon=0,97 \cdot 10^{-2}$; $R_0=1,07 \cdot 10^{-3}$ м; $\rho_0=1,16 \cdot 10^3$ кг/м³. Графики давления: 1 — экспериментальный из [4], 2 — расчетный из [5] и 3 — построенный по (8)

Оригинал функции $F^L(x, s)$ найдем с помощью интеграла Бромвича [3]

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F^L(x, s) \exp(st) ds, \quad (4)$$

в котором контур интегрирования проходит правее всех особенностей подынтегральной функции.

Обычно для перехода к оригиналу нет необходимости прибегать к непосредственному интегрированию (4), поскольку существуют обширные таблицы трансформант и значительное количество теорем, позволяющих редуцировать получаемые трансформанты к табличным. Однако в данном случае нахождение оригинала выражения (3) не может быть выполнено с помощью стандартных приемов.

Учитывая, что точки ветвления функции $F^L(x, s)$ расположены на мнимой оси (фиг. 1), выполним непосредственное интегрирование (3), приняв $\alpha=0$.

Сделав замену переменной $s=i\omega$, что соответствует повороту контура по часовой стрелке на $\pi/2$, оригинал (3) запишем в виде

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t) \exp \left(-i \frac{x}{c_0} \omega \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \right) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (5)$$

Зафиксировав ветвь функции $R(\omega) = \sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)/(\omega^2 - \omega_0^2)}$, представим (5) в виде

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{10} I_n, \quad (6)$$

где I_1 — вклад от интеграла по бесконечно малой полуокружности с центром в точке $\omega=0$, I_2, I_3, I_4, I_5 — вклады при обходе точек ветвления, $I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}$ — вклады интегрирования на интервалах $(-\infty, -\omega_1], [-\omega_1, -\omega_0], [-\omega_0, \omega_0], [\omega_0, \omega_1], [\omega_1, \infty)$ соответственно.

Можно показать, что

$$I_1 = \pi i; \quad I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = 0;$$

$$I_6 + I_{10} = 2i \int_{\omega_1}^{\infty} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \right) \right\} \frac{d\omega}{\omega};$$

$$I_7 + I_9 = 2i \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sin \omega t}{\omega} \exp \left\{ -\frac{x}{c_0} \omega \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \right\} d\omega;$$

$$I_8 = 2i \int_0^{\omega_0} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \right) \right\} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Подставив в (6) значения I_n , получим оригинал (3) в виде

$$F(x, t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\omega_0} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \right) \right\} \frac{d\omega}{\omega} + \right.$$

$$+ \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sin \omega t}{\omega} \exp \left\{ -\frac{x}{c_0} \omega \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \right\} d\omega +$$

$$\left. + \int_{\omega_1}^{\infty} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \right) \right\} \frac{d\omega}{\omega} \right). \quad (7)$$

Следует отметить, что чисто с математической точки зрения обращение (3) требует вычисления всех входящих в (7) интервалов. Однако в случае возмущения с достаточно пологим фронтом в (7) необходимо учесть лишь вклад I_1 и I_8 .

Таким образом,

$$\Phi(x, t) = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^t p_0(t - \tau) L(x, \tau) d\tau, \quad (8)$$

где

$$L(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\omega_0} \sin \left\{ \omega \left(\tau - \frac{x}{c_0} \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \right) \right\} \frac{d\omega}{\omega} \right).$$

Значение интеграла функции $L(x, \tau)$ определяется численно.

На фиг. 2 приведены графики давления. Удовлетворительное совпадение результатов свидетельствует об эффективности предложенного метода решения и справедливости построенной в [2] математической модели среды.

Авторы выражают благодарность Ю. С. Билянскому за помощь при численных расчетах и Л. М. Дыхте за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малых Н. В., Огородников И. А. О применении уравнения Клейна – Гордона для описания структуры импульсов сжатия в жидкости с пузырьками газа. – В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, вып. 29, с. 143–148.
2. Бескаравайный Н. М., Ковалев В. Г., Поздеев В. А. Волновая модель газожидкостной среды. – Акуст. журн., 1983, т. 29, № 2, с. 166–168.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 542 с.
4. Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа. – В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32–44.
5. Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Приближение Бюргерса – Кортевега – де-Вриза в волновой динамике газожидкостных систем. – В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 17–31.

Проектно-конструкторское бюро
электрогидравлики

Поступило в редакцию
20.VI.1984