

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 534

ОТРАЖЕНИЕ ПЛАСТИНЧАТЫХ СДВИГОВЫХ МОД ОТ СИСТЕМЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА ОДНОЙ ИЗ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛАСТИНЫ

Гуляев Ю. В., Магомедов М. А., Мейланов Р. П.

Взаимодействие сдвиговых мод пластины (СМП) с периодической неоднородностью ранее рассматривалось в [1], однако авторами предполагалось, что неоднородностью обладают обе поверхности пластины. Результаты были получены для первых трех мод и не содержали случая изменения номера моды при ее брэгговском отражении.

В настоящем сообщении рассматривается взаимодействие СМП с неоднородностью на одной из сторон пластины. Изотропная пластина занимает область  $-d \leq z \leq 0$ . Направление распространения волны — вдоль оси  $x$ , смещения в волне  $V = \{0, v(x, z), 0\}$ . Неоднородность верхней поверхности пластины имеет вид  $z = a(x) = \eta \cos kx$ , ( $0 \leq x \leq L$ ), где  $2\pi/k$  — период неоднородности,  $\eta$  — ее амплитуда. Смещения  $v(x, z)$  в пластине подчиняются уравнению

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 c^{-2} \right] v(x, z) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний,  $c$  — скорость сдвиговых волн в материале пластины. Решение уравнения (1) находится методом многих масштабов [2, 3], в котором амплитуда неровности  $\eta$  служит малым параметром разложения. Искомое решение должно удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} + k\eta \sin kx \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad \text{при} \quad z = a(x), \\ \partial v / \partial z &= 0 \quad \text{при} \quad z = -d. \end{aligned}$$

Опуская вычисления, приведем лишь окончательные результаты. Дисперсионное уравнение для падающей и отраженной СМП в области  $0 \leq x \leq L$  (под решеткой) с точностью до  $\eta^2$  имеет вид

$$\beta = \frac{k}{2} + \frac{[(v_{gm} - v_{gn})\omega_1 \pm \{(v_{gm} + v_{gn})^2 \omega_1^2 - 4\eta^2 v_{gm} v_{gn} F_m F_n\}^{1/2}]}{2v_{gm} v_{gn}}. \quad (2)$$

Здесь

$$F_j = \frac{c^2 \left[ \left( \frac{j\pi}{d} \right)^2 + k\beta_j \right]}{2\omega_0 d}$$

( $j = m, n$ ) — коэффициент связи между падающей и отраженной СМП;  $v_{gj}$  и  $\beta_j$  — соответственно групповая скорость и волновой вектор СМП в нулевом приближении (т. е. найденные без учета неоднородности границы);  $\omega_0$  — частота, на которой взаимодействуют  $m$ - и  $n$ -я моды, определяется из условия Брэгга  $\beta_m = -\beta_n + k$ ;  $\omega_1 = \omega - \omega_0$ .

Из (2) очевидно существование полосы заграждения ( $\text{Im} \beta \neq 0$ ), что указывает на взаимодействие мод. В частотном диапазоне  $\omega_- < \omega_1 < \omega_+$ ,  $\omega_{\pm} = (2\eta(v_{gm} v_{gn} F_m F_n)^{1/2} / (v_{gm} + v_{gn}))$  волна испытывает затухание, достигающее на частоте  $\omega_1 = (\omega_- + \omega_+) / 2$  максимального значения  $\eta(F_m F_n / v_{gm} v_{gn})^{1/2}$ . Если номера падающей и отраженной мод совпадают, то  $\beta_m = \beta_n = k/2$ ,  $v_{gm} = v_{gn} = v_g$ ,  $F_m = F_n = F$ . В этом симметричном случае волновой вектор в полосе заграждения как у падающей, так и у отраженной волн остается постоянным и равным своему значению в нулевом приближении  $\beta_0 = k/2$ . В несимметричном случае ( $m \neq n$ ) волновой вектор в полосе заграждения меняется линейно с частотой.

В симметричном случае комплексный коэффициент отражения, определяемый в плоскости  $x=0$ ,

$$R(0) = \Gamma \cdot e^{i\Phi} = - \frac{i\eta F \sin(qL)}{qv_g \cos(qL) + i\omega_1 \sin(qL)},$$

где  $q = \beta - k/2$ . Относительная ширина полосы заграждения решетки длиной  $L = 2\pi N/k$  равняется  $\Delta\omega/\omega_0 = 2/\omega_0 [\eta^2 F^2 + (v_g k/2N)^2]^{1/2}$ .

Найденные выражения позволяют рассчитывать структуру узкополосных акустоэлектронных устройств на СМП, таких как резонаторы и фильтры на отражательных решетках.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Auld B. A., Yen B.-H. Theory of surface skimming SH wave guidance by a corrugated surface.— Proc. IEEE Ultrason Symp. 1979, p. 786–790.
2. Seshadri S. R. Love wave interaction in a thin film with a periodic surface corrugation.— IEEE Trans. on Sonics Ultrason. 1978, v. SU-25, N 6, p. 378–383.
3. Найфэ А. Введение в теорию возмущений. М.: Мир, 1984.

Институт радиотехники и  
электроники  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
24.XII.1984

УДК 534.222.2

## АКУСТИЧЕСКАЯ БИСТАБИЛЬНОСТЬ СРЕДЫ С ПУЗЫРЬКАМИ

Заболотская Е. А.

Жидкость с пузырьками газа обладает сильной нелинейностью, обусловленной пузырьками. Известно, что резонансная частота нелинейного осциллятора зависит от амплитуды колебаний [1, 2]. Явление нелинейного резонанса применительно к пузырькам отмечалось в [3–5].

В данной работе показано, что петля гистерезиса, характерная для зависимости амплитуды нелинейных колебаний от частоты, должна наблюдаться и в зависимости коэффициента затухания звуковых волн, распространяющихся в среде с пузырьками, от частоты.

Уравнение колебаний пузырька с точностью до кубических членов по величине возмущения объема  $v$  можно представить в виде

$$\ddot{v} + f\dot{v} + \omega_0^2 v = \alpha v^2 + \beta (2\dot{v}v + \dot{v}^2) - \mu v^3 - \nu (v^2\dot{v} + \dot{v}^2 v) - \epsilon p. \quad (1)$$

Все введенные здесь обозначения приведены в [4].

Комплексная амплитуда колебаний объема пузырька на частоте  $\omega \cong \omega_0$  равна

$$V = \epsilon A / 2\omega_0 \left( \Delta\omega + \frac{\eta}{2\omega_0} |V|^2 - i \frac{f}{2} \right), \quad (2)$$

где  $A$  — комплексная амплитуда волны звукового давления,  $\Delta\omega = |\omega - \omega_0|$  — частотная расстройка,  $\eta = -(\alpha - 3\beta\omega_0^2)^2 / 2(4\omega^2 - \omega_0^2) + (\alpha - \beta\omega_0^2)^2 / \omega_0^2 - 3\mu/4 + \nu\omega_0^2/2$ . Выражение (2) определяет в неявном виде зависимость амплитуды колебаний пузырька от расстройки. В этой зависимости, начиная с некоторых значений амплитуды, наблюдается гистерезис [1, 2].

Для вычисления мощности потерь в пузырьке умножим каждый член уравнения (1) на  $\dot{v}$  и усредним по периоду. После этого получим

$$\overline{f\dot{v}^2} = -\epsilon p \overline{\dot{v}} = \epsilon w, \quad (3)$$

где  $w$  — средняя за период мощность потерь в пузырьке. Она равна

$$w = \overline{f\dot{v}^2} / \epsilon = f\omega_0^2 |V|^2 / 2\epsilon. \quad (4)$$

Подставляя в (4) выражение (2) для  $V$ , получим

$$w = f\epsilon |A|^2 / 8 \left[ \left( \Delta\omega + \frac{\eta}{2\omega_0} |V_1|^2 \right)^2 + \frac{f^2}{4} \right]. \quad (5)$$

Если ввести сечение ослабления звука на пузырьке и вычислить его, то получится

$$\sigma = \frac{w}{I} = \frac{4\pi R_0^2 (\delta/kR_0)}{\left( \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{\eta}{\omega_0^2} |V_1|^2 \right)^2 + \delta^2}, \quad (6)$$

где  $\delta = 1/Q$ , ( $Q$  — добротность пузырька),  $I = |A|^2 / 2\rho c$  — интенсивность звука,  $k$  — волновое число,  $R_0$  — равновесный радиус пузыря. Выражение (6) переходит в формулу (А 6.1.3.5) книги [6], если пренебречь нелинейностью.

Для дальнейшего изложения нужно ввести безразмерные переменные:  $\tilde{\sigma} = \sigma k R_0 /$