

жения (6) и (7) применимы и в реальных случаях, если звукоизоляция ограждения определяется передачей звука через связь по контуру;  $R(\hat{f})$ ,  $f_{\text{н}}$ ,  $\eta$  — соответственно звукоизоляция (в зоне частот  $\hat{f} \approx f_{\text{г}}/2$ , где  $f_{\text{г}}$  — граничная частота волнового совпадения пластин), основная собственная частота изгибных колебаний, конструктивный коэффициент потерь каждой из пластин. На фиг. 2 представлены измеренные [4] и вычисленные по формуле (7) частотные характеристики величины  $\Delta R_1(f)$  для двух двойных ограждений, в каждом из которых одинаковые стальные пластины жестко соединены по контуру деревянными брусками, что существенно влияло на звукоизоляцию: при устранении связи по контуру она повышалась на 10–25 дБ [4]. Здесь  $E=200$  ГПа,  $E_{\text{п}} \approx 3$  ГПа,  $\tilde{c}=5000$  м/с,  $b=0,028$  м,  $d=0,014$  м; площадь пластин  $\approx 0,58 \times 0,58$  м<sup>2</sup>, толщина: по  $0,38 \cdot 10^{-3}$  м (т. е.  $f_{\text{г}} \approx 26$  кГц,  $f_{\text{н}} \approx 7$  Гц,  $f_1 \approx 304$  кГц) в одном случае и по  $10^{-3}$  м (т. е.  $f_{\text{г}} \approx 10$  кГц,  $f_{\text{н}} \approx 17$  Гц,  $f_1 \approx 115$  кГц) — в другом. При  $\eta = 0,0005$ , что примерно следует из оценок по методу работы [5], результаты расчета, согласуются с экспериментальными данными.

Автор благодарит С. А. Рыбака за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Заборов В. И. Теория звукоизоляции ограждающих конструкций. М.: Стройиздат, 1969.
2. Romilly N. Exact Solution for Guided Sound Transmission Through a Simply Supported Plate. — *Acustica*, 1973, v. 28, № 4, p. 234–237.
3. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960.
4. Клячко Л. Н. Исследование звукоизоляции двойных ограждений с жесткой связью по контуру. — В кн.: Борьба с шумами и вибрациями. М.: Стройиздат, 1966, с. 275–278.
5. Винокур Р. Ю. Влияние граничных условий на звукоизоляцию тонкой ограниченной пластины в области частот волнового совпадения. — *Акуст. журн.*, 1980, т. 26, № 1, с. 135–137.

Московский научно-исследовательский  
и проектный институт типового  
и экспериментального проектирования

Поступило в редакцию  
29.IX.1983

УДК 534.143

### АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Григин А. П.

Рассматривается взаимодействие акустических колебаний с постоянным электрическим током в среде, проводимость которой  $\sigma$  зависит от координат  $\sigma = \sigma(x)$ . Для определенного класса функций  $\sigma(x)$  постоянный ток  $I$  может вызвать акустоэлектрические автоколебания.

Физически данная неустойчивость обусловлена образованием в системе некомпенсированного объемного заряда  $q$ , плотность которого пропорциональна градиенту проводимости  $\sigma$  и величине тока  $I$ . При прохождении звуковой волны через среду, содержащую объемный заряд, в областях «сжатия» плотность заряда увеличивается, а в областях «разрежения» уменьшается. В результате происходит локальное перераспределение заряда и генерируется объемная плотность кулоновских сил, пропорциональная амплитуде звуковой волны. В свою очередь кулоновские силы увеличивают амплитуду упругих колебаний, в результате чего в системе возникает положительная обратная связь. Если величина тока превышает некоторое критическое значение, усиление упругих колебаний превосходит их затухание, связанное с диссипативными процессами, и в системе устанавливаются незатухающие акустоэлектрические колебания. Ниже найдены условия возникновения таких колебаний.

Уравнения, описывающие взаимодействие упругих продольных колебаний с объемным зарядом в гидродинамическом приближении, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = \frac{1}{\rho} E q \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \sigma E + q \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{div} E = \frac{4\pi}{\epsilon_0} q \quad (3)$$

где  $u$  — вектор продольных смещений,  $\rho$  — плотность,  $c$  — продольная скорость звука,  $E$  — напряженность электрического поля,  $q$  — плотность объемного некомпенсированного заряда,  $\sigma$  — проводимость,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость.

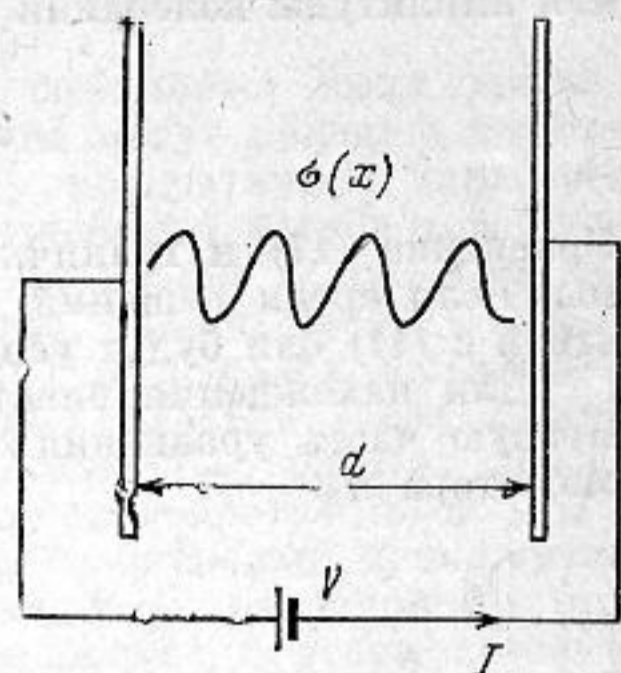


Плотность тока в уравнении (2) содержит два слагаемых: обычный дрейфовый ток  $I_1 = \sigma E$  и конвективный ток  $I_2$ , равный произведению плотности некомпенсированного заряда  $q$  на скорость  $\partial u / \partial t$ . Именно наличие в исходных уравнениях конвективного тока  $I_2$  приводит к акустоэлектрической неустойчивости. Для простоты весь расчет проводится в одномерном случае, т. е. считается, что все величины зависят лишь от одной декартовой координаты  $x$ . На фигуре изображен общий вид рассматриваемой системы, которая состоит из электрически неоднородного проводника  $\sigma(x)$  толщиной  $d$  и источника постоянного тока с разностью электрических потенциалов  $V$ . Для дальнейшего несущественно агрегатное состояние вещества проводника, им может быть твердое тело, жидкость или даже газ. Необходимо лишь, чтобы длина свободного пробега носителей тока была много меньше характерного размера неоднородностей системы.

Граничные условия задачи имеют вид

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=d} = 0; \quad (4)$$

$$\int_0^d E dx = V \quad (5)$$



Система уравнений (1)–(3) допускает статическое решение с  $\partial u / \partial t = 0$ , которое приводит к следующему распределению электрического поля  $E_0$  и объемного заряда  $q_0$ :

$$E_0 = A_1 / \sigma; \quad (6)$$

$$q_0 = - \frac{\epsilon_0 A_1}{4\pi} \frac{d\sigma}{\sigma^2 dx}; \quad (7)$$

где

$$A_1 = V \left[ \int_0^d \frac{dx}{\sigma} \right]^{-1}.$$

Исследуем устойчивость решения (6), (7). Будем считать, что в системе существуют малые возмущения смещений упругой среды  $u$ , электрического поля  $E_1$  и объемного заряда  $q_1$ . Линеаризованная система уравнений (1)–(3), так называемая система в вариациях, имеет при этом следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} (q_0 E_1 + q_1 E_0); \quad (8)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \text{div} \left( \sigma E_1 + q_0 \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0; \quad (9)$$

$$\text{div} E_1 = \frac{4\pi}{\epsilon_0} q_1. \quad (10)$$

Решение системы (8)–(10) ищем в виде

$$u(x, t) = u(x) e^{i\omega t}; \quad q_1(x, t) = q_1(x) e^{i\omega t}; \quad E_1(x, t) = E_1(x) e^{i\omega t}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнения (8)–(10), получим

$$-\omega^2 u - c^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{4\pi}{\epsilon_0 \rho} \frac{d}{dx} (E_0 E_1); \quad (12)$$

$$i\omega q_1 + \frac{d}{dx} (\sigma E_1 + i\omega q_0 u) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{dE_1}{dx} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} q_1. \quad (14)$$

Граничные условия для  $E_1$  имеют вид

$$\int_0^d E_1 dx = 0. \quad (15)$$

Интегрируя уравнения (13), (14) и используя (15), найдем  $E_1$ :

$$E_1 = \frac{A_2}{1 + 4\pi\sigma / (i\epsilon_0\omega)} - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \frac{q_0 u}{1 + 4\pi\sigma / (i\epsilon_0\omega)} \quad (16)$$



где

$$A_2 = \left[ \int_0^d \frac{dx}{1+4\pi\sigma/(i\varepsilon_0\omega)} \right]^{-1} \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^d \frac{q_0 u dx}{1+4\pi\sigma/(i\varepsilon_0\omega)}.$$

Подставляя (16) в (12), получим следующее интегродифференциальное уравнение для амплитуды колебаний  $u$ :

$$c^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 u = - \frac{4\pi}{\varepsilon_0 \rho} \frac{d}{dx} (E_0 E_1). \quad (17)$$

Уравнение (17) и граничные условия (4) определяют спектр колебательной системы. Если среди решений (17) найдутся моды, для которых  $\text{Im } \omega < 0$ , то в соответствии с (11) они будут усиливаться током, проходящим через систему.

Для нахождения спектра колебаний воспользуемся теорией возмущений [1]. Правую часть уравнения (17) можно рассматривать как оператор возмущений  $H_1$  оператора  $H_0$ :

$$H_0 = c^2 \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2.$$

Согласно теории возмущений [1] первая поправка к спектру невозмущенного оператора  $\omega_n^0$  определяется диагональным матричным элементом оператора  $H_1$ :

$$\omega_n^2 = [\omega_n^0]^2 + \langle u_n | H_1 | u_n \rangle, \quad (18)$$

где  $u_n$  — нормированные собственные функции невозмущенного оператора.

Вычисление матричного элемента проведем для случая, когда  $\sigma/\omega \gg 1$ . При этом оператор возмущений имеет вид

$$H_1 = \frac{i4\pi\omega}{\varepsilon_0 \rho} \frac{d}{dx} \left[ q_0 E_0 u \sigma^{-1} - \frac{\varepsilon_0}{4\pi} A_2 E_0 \sigma^{-1} \right]. \quad (19)$$

Будем считать, что проводимость  $\sigma$  изменяется по закону

$$\sigma = (\alpha + \beta x)^{-1}, \quad (20)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные.

Такая неоднородность приводит к образованию объемного заряда с постоянной плотностью. Если электрическая неоднородность (20) слабо влияет на упругие свойства среды, то скорость звука  $c$  можно считать постоянной величиной, а собственные функции оператора  $H_0$  представить в виде

$$u_n = \left( \frac{2}{d} \right)^{1/2} \sin \frac{\pi n}{d} x; \quad n=1, 2, 3 \dots \quad (21)$$

При  $n=1$  для диагонального матричного элемента оператора  $H_1$  имеем

$$\langle u_1 | H_1 | u_1 \rangle = -i\omega \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \frac{V^2}{d^2 \rho} \frac{\beta^2}{(2\alpha + \beta d)^3} \left[ (2\alpha + \beta d)^2 - \frac{16}{\pi^2} \beta^2 d^2 \right]. \quad (22)$$

Как следует из (22),  $\text{Im } \langle u_1 | H_1 | u_1 \rangle < 0$ , если  $2\alpha > (4/\pi - 1)\beta d$ , для моды же с номером  $n=2$  условие  $\text{Im } \omega < 0$  оказывается справедливым при любом соотношении между параметрами  $\alpha$  и  $\beta d$ . Акустоэлектрические автоколебания устанавливаются в системе, если  $(1/\omega) \langle u_n | H_1 | u_n \rangle$  превышает коэффициент поглощения звука, обусловленный вязкостью и теплопроводностью среды.

В заключение следует отметить, что для определения амплитуды установившихся колебаний необходимо рассматривать нелинейную задачу и искать решения, аналогичные предельным циклам Пуанкаре.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.

Всесоюзный научно-исследовательский  
проектно-конструкторский и технологический  
институт источников тока

Поступило в редакцию  
8.IX.1983