АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 2

УДК 534.25

ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ ЗВУКОВОГО ЛУЧА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ АТМОСФЕРЕ

Осташев В. Е.

Получены формулы, определяющие угол скольжения и азимутальный угол звукового луча в стратифицированной движущейся атмосфере через вертикальные профили скорости звука и ветра. Эти формулы выражают закон преломления звукового луча и являются обобщением закона Снеллиуса на случай движущейся среды.

В стратифицированной (слоистой) атмосфере, в которой скорость ветра $\mathbf{v}=0$, траектория звукового луча может быть определена из закона преломления Снеллиуса: $\cos\alpha(z)/c(z)=\text{const}$, где c — скорость звука, α — угол между лучом и горизонтальной плоскостью, z — вертикальная координата, вдоль которой изменяются значения метеоэлементов. В литературе (см., например, [1—4]) известно обобщение закона Снеллиуса на случай $\mathbf{v}\neq 0$. Такое обобщение получено при условии, что траектория звукового луча является плоской кривой, т. е. когда вектор $\mathbf{v}(z)$ лежит в горизонтальной плоскости, не меняет с высотой своего направления, а начальное азимутальное (горизонтальное) направление звукового луча либо совпадает, либо противоположно направлению ветра. Однако это довольно экзотический случай, хотя бы уже потому, что направление ветра, как правило, меняется с высотой. При произвольной стратификации траекторию звукового луча обычно определяют посредством проекций групповой скорости на координатные оси (см., например, [3, 5, 6]). Но в стратифицированной атмосфере есть выделенное направление — вертикальная ось z. Поэтому в стратифицированной атмосфере траекторию звукового луча удобно определить посредством угла скольжения $\alpha(z)$ и азимутального угла $\psi(z)$. Настоящая работа посвящена выводу формул, определяющих α и ψ через функции $c(z)$ и $\mathbf{v}(z)$, которые предполагаются известными. Эти формулы можно рассматривать как закон преломления звукового луча в стратифицированной движущейся среде. В качестве примера будем рассматривать атмосферу, хотя приводимые ниже результаты имеют более широкую область применимости. Отметим, что в атмосфере для не слишком больших горизонтальных расстояний функции c и $\mathbf{v}$, как правило зависят, только от z, так что предположение о стратификации оправдано.

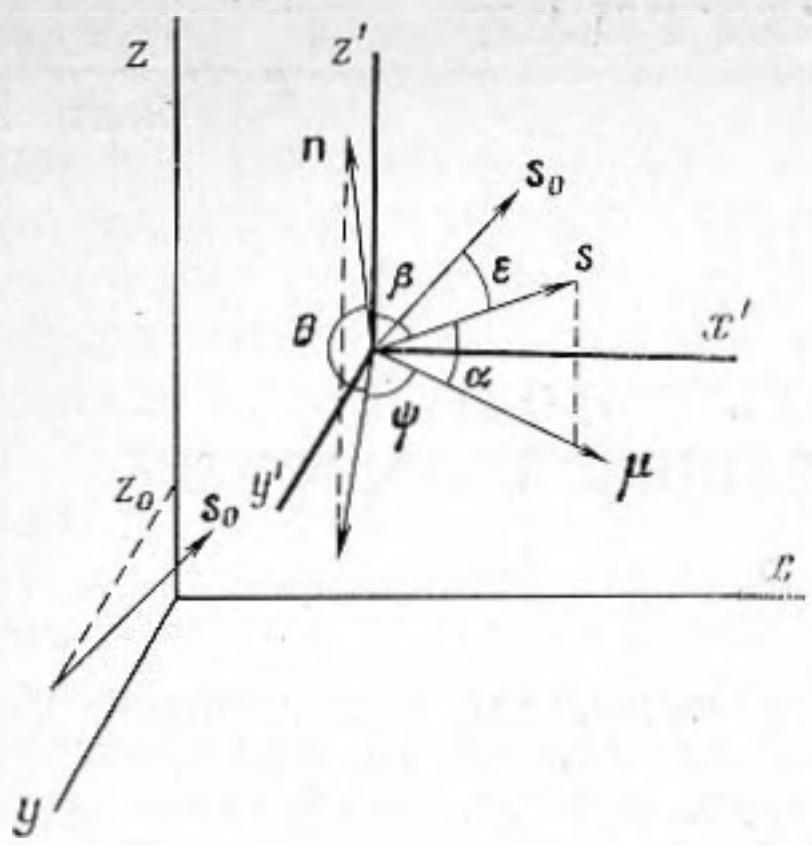
В движущейся атмосфере единичный вектор $\mathbf{s}$, касательный к траектории луча, не совпадает с единичным вектором нормали к волновому фронту $\mathbf{n}$. Напомним, как изменяется вектор $\mathbf{n}(z)$ при распространении акустической волны. В работе [7] для эйконала $\Phi(\mathbf{r})$ в неоднородной движущейся среде (не обязательно стратифицированной) было получено уравнение $|\nabla\Phi|=c_0/c(1-\mathbf{v}\nabla\Phi/c_0)$, где c_0 — некоторая фиксированная скорость звука.

Вполне очевидно, что $\nabla\Phi=\mathbf{k}/k_0$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $k_0=\omega/c_0$, ω — частота звуковой волны. Подставляя эту формулу в уравнение эйконала, получим дисперсионное уравнение

$$\omega=k(\mathbf{r})c(\mathbf{r})+\mathbf{k}(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Такой вид дисперсионного уравнения хорошо известен для случая, когда $\mathbf{v}$ не зависит от $\mathbf{r}$ (см., например, [8]). Оказывается, что это уравнение сохраняет свой вид и для случая, когда $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

В стратифицированной атмосфере в векторах $\mathbf{k}(z)$, $\mathbf{v}(z)$ удобно выделить горизонтальные $\boldsymbol{\varkappa}$, $\mathbf{u}(z)$ и вертикальные $q(z)$, $\xi(z)$ составляющие. При этом вектор $\boldsymbol{\varkappa}$ не зависит от z, так как параметры среды не зависят



от горизонтальных координат. Используя уравнение (1), вектор $\mathbf{n}(z)$ можно представить в виде $\mathbf{n}=\mathbf{k}/k=[(\boldsymbol{\varkappa}, q)c]/(\omega-q\xi-\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{u})$. В то же время $\mathbf{n}=(\mathbf{e}\cos\theta,\ \sin\theta)$, где θ — угол между $\mathbf{n}$ и горизонтальной плоскостью, $\mathbf{e}$ — единичный вектор, определяющий азимутальное направление $\mathbf{n}$ см. фигуру, где x, y, z — декартовая система координат, начало которой лежит на поверхности земли, а x', y', z' — система координат, полученная параллельным переносом системы координат x, y, z в точку, в которой рассматривается $\mathbf{n}$. Приравнивая правые части последних двух формул для $\mathbf{n}$, получаем векторное уравнение для определения θ и $\mathbf{e}$. Решая последнее, получим формулы, выражающие закон преломления нормали к волновому фронту

$$c(z)/\cos\theta(z)+\mathbf{eu}(z)+\xi(z)\operatorname{tg}\theta(z)=\omega/\varkappa, \qquad \mathbf{e}=\boldsymbol{\varkappa}/\varkappa. \tag{2}$$

Формула (2) известна уже давно (см. например, [9]). Из (2) можно получить выражение для угла θ через профили $c(z)$ и $\mathbf{v}(z)$:

$$\cos\theta=\frac{(\omega/\varkappa-\mathbf{eu})c\pm\xi Q}{(\omega/\varkappa-\mathbf{eu})^2+\xi^2}, \tag{3}$$

где $Q=((\omega/\varkappa-\mathbf{eu})^2-c^2+\xi^2)^{1/2}$. В (3) и далее верхний и нижний знаки соответствуют восходящему и нисходящему лучам.

Заметим, что в качестве параметров, определяющих тот или иной луч, обычно выбирают либо величины θ_0, $\mathbf{e}$, либо величины α_0, ψ_0. Здесь и далее нижний индекс 0 у величин, зависящих от z, означает, что эти величины берутся при $z=z_0$, где z_0 — некоторая фиксированная высота. При нашем рассмотрении лучевыми параметрами являются модуль и направление двумерного вектора $\boldsymbol{\varkappa}/\omega$, где ω и $\boldsymbol{\varkappa}$ можно рассматривать как частоту и горизонтальную составляющую волнового вектора квазиплоской монохроматической звуковой волны, которая соответствует рассматриваемому лучу. Такие лучевые параметры удобны, например, при совместном волновом и лучевом описании звукового поля. Формула (2) и приводимая ниже формула (4) позволяют установить связь между $\boldsymbol{\varkappa}/\omega$ и θ_0, $\mathbf{e}$ или α_0, ψ_0. Эта связь становится наиболее простой, если $\mathbf{v}_0=0$. В этом случае $\mathbf{s}_0=\mathbf{n}_0$, а $\omega/\varkappa=c_0/\cos\theta_0$. Последняя формула приводится также в работе [10]. Заметим, что в качестве z_0 можно выбрать нулевую высоту над поверхностью земли, так как $\mathbf{v}(z=0)=0$.

Перейдем теперь к рассмотрению единичного вектора $\mathbf{s}$, касательного к траектории луча. Из закона дисперсии легко получить выражение для групповой скорости $\mathbf{w}=\partial\omega/\partial\mathbf{k}=c\mathbf{n}+\mathbf{v}$. Для вектора $\mathbf{s}$ имеют место следующие формулы:

$$\mathbf{s}=(\boldsymbol{\mu}\cos\alpha, \sin\alpha)=\frac{\mathbf{w}}{w}=\frac{c\mathbf{n}+\mathbf{v}}{|c\mathbf{n}+\mathbf{v}|}=\frac{(\mathbf{e}c\cos\theta+\mathbf{u},\ c\sin\theta+\xi)}{\sqrt{c^2+2c(\xi\sin\theta+\mathbf{eu}\cos\theta)+v^2}} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — единичный вектор, определяющий азимутальное направление $\mathbf{s}$ (см. фигуру). Из (4) следует, что в движущейся атмосфере $\mathbf{s}$ не совпадает с $\mathbf{n}$. Поэтому закон преломления звукового луча будет иной, нежели закон преломления (2) нормали к волновому фронту. Сначала рассмотрим азимутальное направление звукового луча, которое удобно характеризовать углом ψ между векторами $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{e}$. Из (4) следует, что

$$\cos\psi=\frac{c\cos\theta+\mathbf{eu}}{|\mathbf{e}c\cos\theta+\mathbf{u}|}=(1+u_\perp^2/(c\cos\theta+\mathbf{eu})^2)^{-1/2}, \tag{5}$$

где $\cos\theta$ определяется согласно (3), а $u_\perp=(u^2-(\mathbf{eu})^2)^{1/2}$ — перпендикулярная к $\mathbf{e}$ составляющая горизонтальной скорости ветра. Формула (5) позволяет определить азимутальное направление звукового луча в стратифицированной движущейся атмосфере. Пусть угол θ не слишком близок к $\pm\pi/2$, так что $\cos\theta\gg u/c$. В этом случае из (5) следует, что $\psi\approx\approx u_\perp/c\cos\theta\ll 1$ — т. е. азимутальное направление луча меняется незначительно. Из последней формулы также следует, что изменение ψ в основном обусловливается изменением $u_\perp$. Пусть теперь $\cos\theta\leqslant u/c$, т. е. угол θ близок к $\pi/2$ или к $-\pi/2$. В этом случае угол ψ уже не мал и по абсолютной величине может достигать величины 2π. Кроме того, величина ψ может существенно зависеть не только от $u_\perp$, но и от ξ, $u_\parallel=\mathbf{eu}$, а также от изменения c.

Перейдем теперь к рассмотрению угла скольжения α. Из (3) и (4) следует, что

$$\sin\alpha=\frac{[\pm(\omega/\varkappa-\mathbf{eu})c+\xi Q]Q}{\sqrt{[(\omega/\varkappa-\mathbf{eu})^2+\xi^2][(\omega^2/\varkappa^2-(\mathbf{eu})^2+u^2)c^2+Q^2v^2+2Qc\xi\omega/\varkappa]}}. \quad (6)$$

Формула (6) определяет зависимость угла скольжения α от вертикальных профилей $c(z)$, $\mathbf{u}(z)$, $\xi(z)$ и наряду с формулой (5) выражает закон преломления звукового луча в стратифицированной движущейся атмосфере. Отметим, что в атмосфере в подавляющем большинстве случаев вертикальную составляющую скорости ветра ξ можно считать пренебрежимо малой. Поэтому в (6) можно положить $\xi=0$. В этом случае формула (6) упрощается и принимает вид

$$\sin\alpha=\pm\left(\frac{(\omega/\varkappa-\mathbf{eu})^2-c^2}{\omega^2/\varkappa^2-(\mathbf{eu})^2+u^2(\omega/\varkappa-\mathbf{eu})^2/c^2}\right)^{1/2}. \quad (7)$$

В отличие от (6) выражение (7) можно разрешить относительно $\omega/\varkappa$, что позволяет записать закон преломления луча в следующем виде:

$$\frac{c}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\left[\left(\frac{\mathbf{eu}}{c}\right)^2\sin^2\alpha-u^2/c^2\right]}-\mathbf{eu}\sin^2\alpha/c}+\mathbf{eu}=\omega/\varkappa. \quad (8)$$

Как отмечалось выше для частного случая $|\mathbf{eu}|=u$, формула (8) была получена ранее [1—4]. При $u=0$ формула (8) переходит в закон Снеллиуса. Если $u\neq 0$, то эту формулу можно рассматривать как обобщение закона Снеллиуса на случай движущейся среды.

Закон преломления $\mathbf{n}$ значительно проще, чем закон преломления $\mathbf{s}$. В то же время угол β между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ порядка v/c, т. е. достаточно мал. На этом основании в ряде работ (см., например, [7, 11, 12]) считалось, что траекторию звукового луча можно приближенно определить из закона преломления $\mathbf{n}$. Однако в атмосфере изменение направления звукового луча также мало. Если это изменение порядка β, то замена $\mathbf{s}$ на $\mathbf{n}$ явно неправомочна. Вопрос о возможности приближенной замены $\mathbf{s}$ на $\mathbf{n}$ рассматривается ниже.

Будем считать, что $\xi=0$. В этом случае из (1) можно получить следующее выражение для показателя преломления:

$$N=\frac{k}{k}=\frac{c_0}{c}(1-\mathbf{n}_0\mathbf{u}/c_0)=1-(c/c_0-1)-\mathbf{n}_0\mathbf{u}/c_0+o(\eta), \quad (9)$$

где $\eta=\max(u/c_0;\ |c/c_0-1|)$ — малый параметр. В (9) слагаемые c/c_0-1 и $\mathbf{n}_0\mathbf{u}/c_0$ с точностью до членов порядка $o(\eta)$ описывают изменения показателя преломления, связанные соответственно с изменениями температуры[1] и скорости ветра.

Используя (4), а также учитывая, что $|\mathbf{n}-\mathbf{n}_0|\sim\eta$, для β можно получить следующие соотношения:

---

[1] Скорость звука связана с температурой T формулой $c^2=\gamma RT$, где γ — отношение удельных теплоемкостей, R — газовая постоянная.

$$\beta(z)=\arccos \mathbf{sn}=\arccos\frac{1+\mathbf{un}/c}{|\mathbf{n}+\mathbf{u}/c|}=\frac{(u^2-(\mathbf{n}_0\mathbf{u})^2)^{1/2}}{c_0}+o(\eta). \qquad (10)$$

Из (10) следует, что с точностью до членов порядка $o(\eta)$ изменение угла β зависит только от изменения $\mathbf{u}$. В частности, если $\mathbf{u}=0$, то $\beta=0$ и $\mathbf{s}=\mathbf{n}$.

Изменение направления звукового луча будем характеризовать углом ε между векторами $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}_0$ (см. фигуру). В качестве уровня z_0, от которого отсчитывается угол ε, удобно выбрать такой уровень, на котором $\mathbf{u}_0=0$. Тогда $\mathbf{s}_0=\mathbf{n}_0$, а для угла ε имеют место формулы

$$\varepsilon(z)=\arccos \mathbf{s}_0\mathbf{s}=\arccos\frac{\mathbf{n}_0\mathbf{n}+\mathbf{n}_0\mathbf{u}/c}{|\mathbf{n}+\mathbf{u}/c|}=$$
$$=\left[2(1-\mathbf{nn}_0)\left(1-\frac{\mathbf{n}_0\mathbf{u}}{c_0}\right)+\frac{2\mathbf{un}_0}{c_0}\left(\frac{\mathbf{un}_0}{c_0}+\frac{c}{c_0}-1\right)+\beta^2\right]^{1/2}+o(\eta). \qquad (11)$$

В (11) величина β может быть определена по последней формуле (10), а для скалярного произведения $\mathbf{nn}_0$ имеем следующее соотношение:

$$\mathbf{nn}_0=\frac{\cos^2\theta_0 c/c_0\pm\sin\theta_0[(1-\mathbf{n}_0\mathbf{u}/c_0)^2-\cos^2\theta_0 c/c_0]^{1/2}}{1-\mathbf{n}_0\mathbf{u}/c_0} \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что изменение ε зависит как от изменения $\mathbf{u}$, так и от изменения c.

При определении траектории звукового луча вектор $\mathbf{s}$ можно приближенно заменять на $\mathbf{n}$, если изменение $\mathbf{s}$ значительно больше отклонения $\mathbf{n}$ от $\mathbf{s}$, т. е. если $\varepsilon\gg\beta$. Если же $\varepsilon\sim\beta$, то замена $\mathbf{s}$ на $\mathbf{n}$ неправомочна. Полученные выше формулы (10)—(12) позволяют сравнить углы ε и β.

Пусть $|\theta_0|\gg(2\eta)^{1/2}$. Тогда квадратный корень в (12) может быть разложен в ряд по степеням η. Подставляя после этого (12) в (11), получим

$$\varepsilon^2=\left(\frac{\mathbf{n}_0\mathbf{u}}{c_0}+\frac{c}{c_0}-1\right)\left[\frac{\mathbf{n}_0\mathbf{u}}{c_0}(1+\sin^{-2}\theta_0)+\operatorname{ctg}^2\theta_0(c/c_0-1)\right]+\beta^2+o(\eta^2). \qquad (13)$$

Пусть $u/c_0\ll|c/c_0-1|$, а $\pi/2-|\theta_0|\gg(u/c_0)/|c/c_0-1|$, т. е. изменение показателя преломления обусловливается в основном изменением температуры, см. (9), а угол θ_0 не слишком близок к $\pm\pi/2$. Тогда, исходя из формул (13) и (10), можно показать, что $\varepsilon\ll\beta$. Выполнение этого неравенства при рассматриваемых условиях легко объяснимо. Действительно, если скорость ветра достаточно мала, то вектор $\mathbf{s}$ можно приближенно заменять на $\mathbf{n}$, так как при $\mathbf{u}=0$ эти векторы совпадают. Это рассуждение справедливо, если направление звукового луча не слишком близко к вертикальному. При вертикальном распространении звука изменение температуры не приводит к изменению $\mathbf{s}$, в то время как любой малый ветер будет приводить к изменению $\mathbf{s}$. И действительно, при $\pi/2-|\theta_0|\leqslant u/c_0/|c/c_0-1|$ из (10) и (13) следует, что $\varepsilon\sim\beta$ и замена $\mathbf{s}$ на $\mathbf{n}$ в этом случае неправомочна.

Пусть по-прежнему $|\theta_0|\gg(2\eta)^{1/2}$, но $u/c_0\geqslant|c/c_0-1|$. В этом случае могут выполняться как неравенство $\varepsilon\gg\beta$, так и соотношение $\varepsilon\sim\beta$. Какой из этих двух случаев реализуется достаточно сложным образом зависит от соотношения величин θ_0, $(c/c_0-1)/uc_0$, $\mathbf{eu}/u$. Выше отмечалось, что направление ветра существенно изменяется с высотой. Если использовать последнее обстоятельство, т. е. считать, что в формулах (10) и (13) вектор $\mathbf{u}$ существенно изменяет свое направление, то из этих двух формул нетрудно показать, что случай $\varepsilon\sim\beta$ всегда реализуется. Таким образом, если $u/c_0\geqslant|c/c_0-1|$, т. е. когда показатель преломления может существенно зависеть от скорости ветра, заменять $\mathbf{s}$ на $\mathbf{n}$, вообще говоря, нельзя.

Рассмотрим наконец случай пологого распространения, когда $|\theta_0|\leqslant(2\eta)^{1/2}$. В этом случае квадратный корень в (12) уже нельзя разложить в ряд по малому параметру η. Подставляя (12) в (11) и сравнивая получающееся выражение для ε с выражением (10) для β, нетрудно показать, что при

$$u/c_0\ll\max(|c/c_0-1|^{1/2};\quad |\theta_0|;\quad |\mathbf{eu}/u|), \qquad (14)$$

справедливо неравенство $\varepsilon \gg \beta$. Если же (14) не выполняется, то $\varepsilon \sim \beta$. Из (14) следует, что при пологом распространении условия правомочности приближенной замены **s** на **n** оказываются менее жесткими. Например, если $|c/c_0-1| \sim u/c_0$, то при $|\theta_0| \gg (2\eta)^{1/2}$ вектор **s**, вообще говоря, нельзя заменить на **n**. Если же $|\theta_0| \leqslant (2\eta)^{1/2}$, то согласно (14) такая замена правомочна.

Таким образом, при определении траектории звукового луча **s** можно приближенно заменять на **n** если выполняются неравенства

$$(2\eta)^{1/2} \ll |\theta_0|; \quad \frac{u/c_0}{|c/c_0-1|} \ll \frac{\pi}{2} - |\theta_0|; \quad u/c_0 \ll \left| \frac{c}{c_0} - 1 \right|;$$

или если $|\theta_0| \leqslant (2\eta)^{1/2}$ и выполняется неравенство (14). В остальных случаях заменять **s** на **n**, вообще говоря, нельзя.

Автор благодарит В. И. Татарского за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kornhauser E. T* Ray theory for moving fluids.– J. Acoust. Soc. Amer., 1953, v. 25, № 5, p. 945–949.
2. *Warren C. H. E.* A note of the refraction of sound in a moving gas.– J. Sound. Vib., 1964, v. 1, № 2, p. 175–178.
3. *Thompson R. J.* Ray theory for an inhomogeneous moving medium.– J. Acoust. Soc. Amer., 1972, v. 51, № 5, p. 1675–1682.
4. *Brown E. H., Hall F. F.* Advances in atmospheric acoustics.– Rev. Geoph. Space. Phys., 1978, v. 16, № 1, p. 47–110.
5. *Chessel C. I.* Three-dimensional acoustic-ray tracing in an inhomogeneous anisotropic atmosphere using hamilton's eguations.– J. Acoust. Soc. Amer., 1973, v. 53, № 1, p. 83–87.
6. *Groves G. V.* Geometrical theory of sound propagation in the atmosphere.– J. Atm. Terrest. Phys., 1955, v. 7, p. 113–127.
7. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
9. *Чибисов С. В.* О времени пробега звукового луча в атмосфере.– Изв. АН СССР: Сер. геофиз., 1940, № 1, с. 33–118.
10. *Осташев В. Е.* Возвратно-наклонное акустическое зондирование атмосферы.– Изв. АН СССР. ФАО, 1982, т. 18, № 9, с. 899–904.
11. *Дуккерт П.* Распространение волн взрывов в атмосфере. М.: ГТТИ, 1934.
12. *Буш Г. А., Грачев А. И., Куличков С. Н., Матвеев А. К., Мордухович М. И., Отрезов А. И.* Распространение инфразвуковых волн от экспериментального взрыва. М.: Препринт ИФА АН СССР, 1982, с. 35.

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18.IV.1983