АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 1

УДК 539.3:534.1

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО РАССЕЯННОМУ ВОЛНОВОМУ ПОЛЮ

Сергеев А. В.

На основании измерений пространственно-частотного распределения поля, рассеянного упругой сферической оболочкой, рассмотрена возможность нахождения параметров оболочки.

В последнее время появились работы, в которых рассмотрена возможность нахождения параметров упругих оболочек в жидкости по эхосигналу [1—4]. Однако предложенные там методы содержат ряд промежуточных этапов, требующих дополнительного анализа и приводящих к довольно громоздким алгоритмам обработки эхосигнала. Как отмечалось в работе [2], указанные выше методы нахождения параметров оболочки не являются единственными и, вполне вероятно, не лучшими, поэтому разработка новых алгоритмов, а также исследование их возможностей для решения указанной выше задачи весьма актуально.

В данной работе рассмотрена возможность построения более простого по своей структуре алгоритма для определения параметров упругой сферической оболочки в жидкости, использующего пространственно-частотную обработку поля, рассеянного оболочкой.

Рассмотрим тонкую упругую, изотропную, сферическую оболочку толщиной h с радиусом срединной поверхности R, $h \ll R$. Материал оболочки удовлетворяет закону Гука и характеризуется модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ_s. Внутренность оболочки заполнена идеальной сжимаемой жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1. Оболочка находится в безграничной идеальной сжимаемой жидкости с плотностью ρ и скоростью звука c.

В рассматриваемой задаче определения параметров оболочки предполагается, что характеристики окружающей среды известны. Кроме того, известен радиус оболочки R, а также параметры заполнителя ρ_1, c_1. Необходимо определить h, E, ν, ρ_s по рассеянному оболочкой волновому полю.

Будем облучать оболочку плоской гармонической волной, которую в сферических координатах r, θ, φ с началом в центре оболочки и полярной осью, направленной навстречу падающей волне, можно записать в виде $p_i(r, \theta, t) = \exp j(kr\cos\theta - \omega t)$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина облучающей волны, ω — круговая частота.

В силу сферической симметрии зависимость от координаты φ отсутствует. Воспользовавшись известным выражением из [5], представим действительную и мнимую части поля вне оболочки в виде

$$\operatorname{Re} p(r, \theta) = \operatorname{Re} p_i(r, \theta) + \operatorname{Re} p_r(r, \theta) - \operatorname{Re} p_s(r, \theta); \tag{1}$$

$$\operatorname{Im} p(r, \theta) = \operatorname{Im} p_i(r, \theta) + \operatorname{Im} p_r(r, \theta) - \operatorname{Im} p_s(r, \theta), \tag{2}$$

где $p_r(r, \theta)$ — поле, рассеянное жесткой сферой, $p_s(r, \theta)$ — поле излучаемое оболочкой, совершающей упругие колебания. Действительная и мнимая части $p_r(r, \theta)$ имеют следующий вид:

$$\operatorname{Re} p_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nr} [\sin\beta_n n_n(kr) - \cos\beta_n j_n(kr)] P_n(\cos\theta); \tag{3}$$

$$\operatorname{Im} p_r(r,\theta)=-\sum_{n=0}^{\infty} A_{nr}[\sin\beta_n j_n(kr)+\cos\beta_n n_n(kr)]P_n(\cos\theta) \qquad (4)$$

где $A_{nr}=(2n+1)j_n'(\mu)/A_n'(\mu)$, $\mu=\omega R/c$, $\beta_n=n\pi/2-\alpha_n'$, $\alpha_n'=\operatorname{arc\,tg} n_n'(\mu)/j_n'(\mu)$, $A_n'(\mu)=[j_n'^2(\mu)+n_n'^2(\mu)]^{1/2}$, $j_n(x)$, $n_n(x)$ — сферические функции Бесселя порядка n, $P_n(x)$ — полином Лежандра порядка n.

Для поля $p_s(r,\theta)$ имеем

$$\operatorname{Re} p_s(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[X_n^{(c)} j_n(kr)-X_n^{(s)} n_n(kr)]P_n(\cos\theta), \qquad (5)$$

$$\operatorname{Im} p_s(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[X_n^{(s)} j_n(kr)+X_n^{(c)} n_n(kr)]P_n(\cos\theta), \qquad (6)$$

$$X_n^{(c)}=D_{ns}\cos\gamma_n, \quad X_n^{(s)}=D_{ns}\sin\gamma_n, \qquad (7)$$

$$D_{ns}=\frac{\rho c(2n+1)}{\mu^2 A_n'^2(\mu)M_{zn}}, \quad M_{zn}=\{D_{in}^2(\omega)+[D_{rn}(\omega)-Z_{1n}]^2\}^{1/2}, \qquad (8)$$

$D_{in}(\omega)=\operatorname{Im} Z_{sn}$, $D_{rn}(\omega)=\operatorname{Re} Z_{sn}$, $Z_{sn}=\rho c h_n^{(1)}(\mu)/h_n^{(1)}(\mu)$, $h_n^{(1)}(x)$ — сферическая функция Ханкеля порядка n

$$Z_{1n}=Z_n+\rho_1 c_1 j_n(\mu_1)/j_n'(\mu_1), \quad \mu_1=\omega R/c_1, \qquad (9)$$

$$Z_n=\omega\rho_s h\left(1-\frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{G_1 a_{11}}\right) \qquad (10)$$

$$a_{11}=G_1+1-\nu-n(n+1), \quad a_{12}=1+\nu+n(n+1)h^2/12R^2, \qquad (11)$$

$$a_{21}=n(n+1)(1+\nu)+n^2(n+1)^2h^2/12R^2, \qquad (12)$$

$$a_{22}=-2(1+\nu)-n^2(n+1)^2h^2/12R^2, \quad G_1=(1-\nu^2)\rho_s R^2\omega^2/E, \qquad (13)$$

$$\gamma_n=(n-1)\pi/2-\alpha_{zn}, \quad \alpha_{zn}=\operatorname{arc\,tg} D_{in}(\omega)/[D_{rn}(\omega)-Z_{1n}]. \qquad (14)$$

Из анализа соотношений (3)—(14) видно, что лишь $\operatorname{Re} p_s(r,\theta)$ и $\operatorname{Im} p_s(r,\theta)$ зависят от искомых параметров оболочки.

Введем в рассмотрение информационный параметр

$$\operatorname{tg}\gamma_n=X_n^{(s)}/X_n^{(c)}, \qquad (15)$$

который связан с неизвестными параметрами оболочки. Далее, учитывая быструю сходимость D_{ns}, поскольку $D_{ns}=O\{2n+1/(2n-1)!!\}$, при $n\gg\mu$, можно ограничиться в (5) и (6) конечным числом членов. Тогда из (1), (2), (5) и (6) получаем следующие соотношения для вычисления информационного параметра

$$\sum_{n=0}^{N-1}[X_n^{(c)} j_n(kr)-X_n^{(s)} n_n(kr)]P_n(\cos\theta)=b_r(r,\theta), \qquad (16)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}[X_n^{(s)} j_n(kr)+X_n^{(c)} n_n(kr)]P_n(\cos\theta)=b_i(r,\theta), \qquad (17)$$

где

$$b_r(r,\theta)=\operatorname{Re} p_i(r,\theta)+\operatorname{Re} p_r(r,\theta)-\operatorname{Re} p(r,\theta), \qquad (18)$$

$$b_i(r,\theta)=\operatorname{Im} p_i(r,\theta)+\operatorname{Im} p_r(r,\theta)-\operatorname{Im} p(r,\theta). \qquad (19)$$

Для нахождения N первых коэффициентов $X_n^{(s)}$, $X_n^{(c)}$ в (16) и (17), необходимо сформировать системы из $2N$ линейных алгебраических уравнений для действительных или мнимых частей поля соответственно. Это

можно осуществить, измеряя поле вне оболочки в $2N$ точках с координатами (r_m, θ_m), где $0<\theta_m<\pi$, $m=\overline{0, 2N-1}$. Искомая система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\sum_{n=0}^{2N-1} a_{mn}^{(r)} Y_n^{(r)} = b_r(r_m, \theta_m) \tag{20}$$

— для действительной части поля или

$$\sum_{n=0}^{2N-1} a_{mn}^{(i)} Y_n^{(i)} = b_i(r_m, \theta_m), \quad m=\overline{0, 2N-1}, \tag{21}$$

— для мнимой части поля, где

$$a_{mn}^{(r)} = j_n(kr_m) P_n(\cos\theta_m), \quad Y_n^{(r)} = X_n^{(c)}, \quad n=\overline{0, N-1},$$

$$a_{mn}^{(r)} = -n_e(kr_m) P_e(\cos\theta_m), \quad Y_n^{(r)} = X_n^{(s)}, \quad n=l+N, \quad l=\overline{0, N-1},$$

$$a_{mn}^{(i)} = a_{mn}^{(r)}, \quad Y_n^{(i)} = X_n^{(s)}, \quad n=\overline{0, N-1},$$

$$a_{mn}^{(i)} = -a_{mn}^{(r)}, \quad Y_n^{(i)} = X_n^{(c)}, \quad n=l+N, \quad l=\overline{0, N-1}.$$

Значения информационного параметра можно определить по следующим формулам:

$$\operatorname{tg}\gamma_n = Y_{n+N}^{(r)} / Y_n^{(r)}, \tag{22}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_n = Y_n^{(i)} / Y_{n+N}^{(i)}, \tag{23}$$

решая соответственно системы (20) или (21).

Наряду с общим расположением приемников, описанным выше, можно рассмотреть и два частных случая регистрации поля.

В первом из них приемники располагаются на прямой, составляющей угол θ_p с полярной осью, на различных расстояниях r_m от центра оболочки. Из (16) и (17) получаем в этом случае следующую систему уравнений:

$$\sum_{n=0}^{2N-1} a_{mn}^{(r)} Y_n^{(r)} = b_r(r_m, \theta_p), \tag{24}$$

$$\sum_{n=0}^{2N-1} a_{mn}^{(i)} Y_n^{(i)} = b_i(r_m, \theta_p), \quad m=\overline{0, 2N-1}, \tag{25}$$

где

$$a_{mn}^{(r)} = j_n(kr_m), \quad Y_n^{(r)} = X_n^{(c)} P_n(\cos\theta_p), \quad n=\overline{0, N-1},$$

$$a_{mn}^{(r)} = -n_l(kr_m), \quad Y_n^{(r)} = X_n^{(s)} P_l(\cos\theta_p), \quad n=l+N, \quad l=\overline{0, N-1},$$

$$a_{mn}^{(i)} = a_{mn}^{(r)}, \quad Y_n^{(i)} = X_n^{(s)} P_n(\cos\theta_p), \quad n=\overline{0, N-1},$$

$$a_{mn}^{(i)} = -a_{mn}^{(r)}, \quad Y_n^{(i)} = X_n^{(c)} P_l(\cos\theta_p), \quad n=l+N, \quad l=\overline{0, N-1}.$$

При этом информационный параметр определяется также соотношениями (22) или (23).

Во втором случае приемники располагаются на фиксированном расстоянии от центра оболочки r_p под различными углами $0<\theta_m<\pi$.

Из выражений (16) и (17) получаем систему уравнений

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} Y_n^{(r)} = b_r(r_p, \theta_m), \tag{26}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} Y_n^{(i)} = b_i(r_p, \theta_m), \quad m=\overline{0, N-1}, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_n^{(r)} &= X_n^{(c)} j_n(kr_p) - X_n^{(s)} n_n(kr_p) \\ Y_n^{(i)} &= X_n^{(s)} j_n(kr_p) + X_n^{(c)} n_n(kr_p) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$a_{mn} = P_n(\cos\theta_m).$$

Значение информационного параметра в этом случае равно

$$\operatorname{tg}\gamma_n = \frac{j_n(kr_p) - R_n n_n(kr_p)}{n_n(kr_p) + R_n j_n(kr_p)}, \quad R_n = Y_n^{(r)} / Y_n^{(i)}. \tag{29}$$

Сопоставляя последний случай с двумя предыдущими, видно, что в первых двух для получения того же количества значений информационных параметров $\operatorname{tg}\gamma_n$ требуется в 2 раза больше измерений значений поля, чем в последнем. Это объясняется тем, что в первых двух случаях для нахождения значений информационного параметра можно использовать системы линейных алгебраических уравнений, формируемых из действительных или мнимых частей поля только независимо друг от друга, тогда как при регистрации поля в точках окружности с центром совпадающим с центром оболочки, решения систем (26) и (27) образуют совместную систему уравнений (28), из которой определяют $\operatorname{tg}\gamma_n$.

Далее установим связь между значениями $\operatorname{tg}\gamma_n$ и искомыми неизвестными. Из (14) имеем, что

$$\operatorname{tg}\gamma_n = [D_{rn}(\omega) - Z_{1n}] / D_{in}(\omega) \tag{30}$$

и, как следует из выражений (9)—(13), значение информационного параметра $\operatorname{tg}\gamma_n$ и h, E, ν, ρ_s наиболее просто связаны между собой при $n=0$. В этом случае

$$Z_{10} = \omega\rho_s h - \frac{2}{R^2\omega}\frac{hE}{1-\nu} + \rho_1 c_1 j_0(\mu_1)/j_0'(\mu_1). \tag{31}$$

Окончательно из выражений (30) и (31) получаем следующее уравнение, связывающее значение $\operatorname{tg}\gamma_0$ с неизвестными параметрами оболочки:

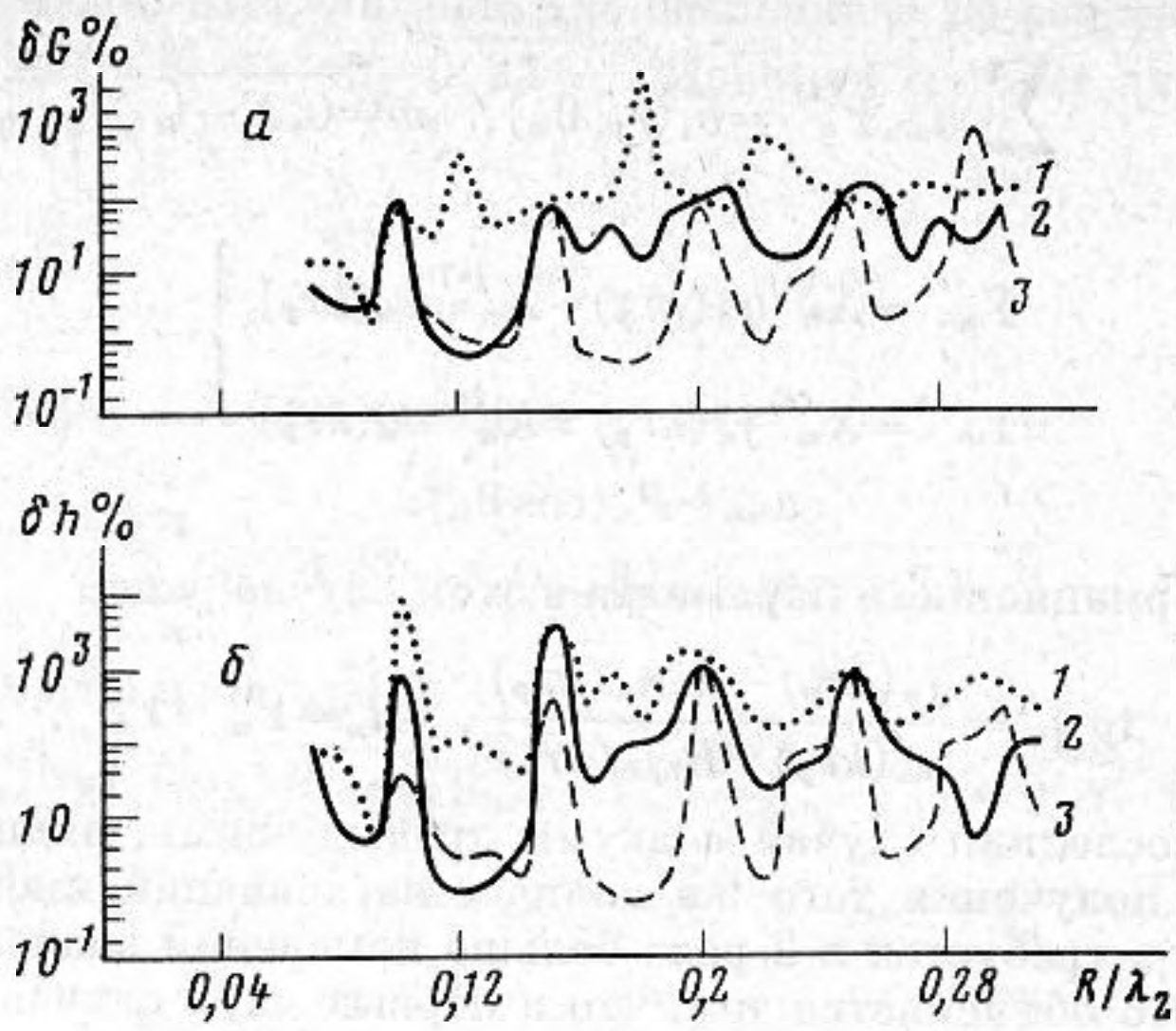
$$\omega\rho_s h - 2hE/R^2\omega(1-\nu) = B(\omega), \tag{32}$$

где $B(\omega) = D_{r0}(\omega) - D_{i0}(\omega)\operatorname{tg}\gamma_0 - \rho_1 c_1 j_0(\mu_1)/j_0'(\mu_1)$. Выражение (32) представляет собой нелинейное уравнение, содержащее четыре неизвестных, для нахождения которых необходимо иметь нелинейную систему из четырех уравнений. Ее можно получить, используя зондирующие сигналы с четырьмя различными частотами. Однако известные методы [6] решения нелинейных алгебраических систем уравнений требуют знания начальных приближений, что в нашем случае невозможно. Это затруднение можно преодолеть, если рассматривать выражение (30) как линейное уравнение с двумя неизвестными, т. е. $\omega y_1 - \frac{2}{R^2\omega} y_2 = B(\omega)$, где $y_1 = \rho_s h$, $y_2 = hE/(1-\nu)$, для определения которых необходимо иметь систему из двух линейных уравнений. Эту систему можно получить, облучая оболочку зондирующими сигналами с двумя различными частотами. Она будет иметь следующий вид:

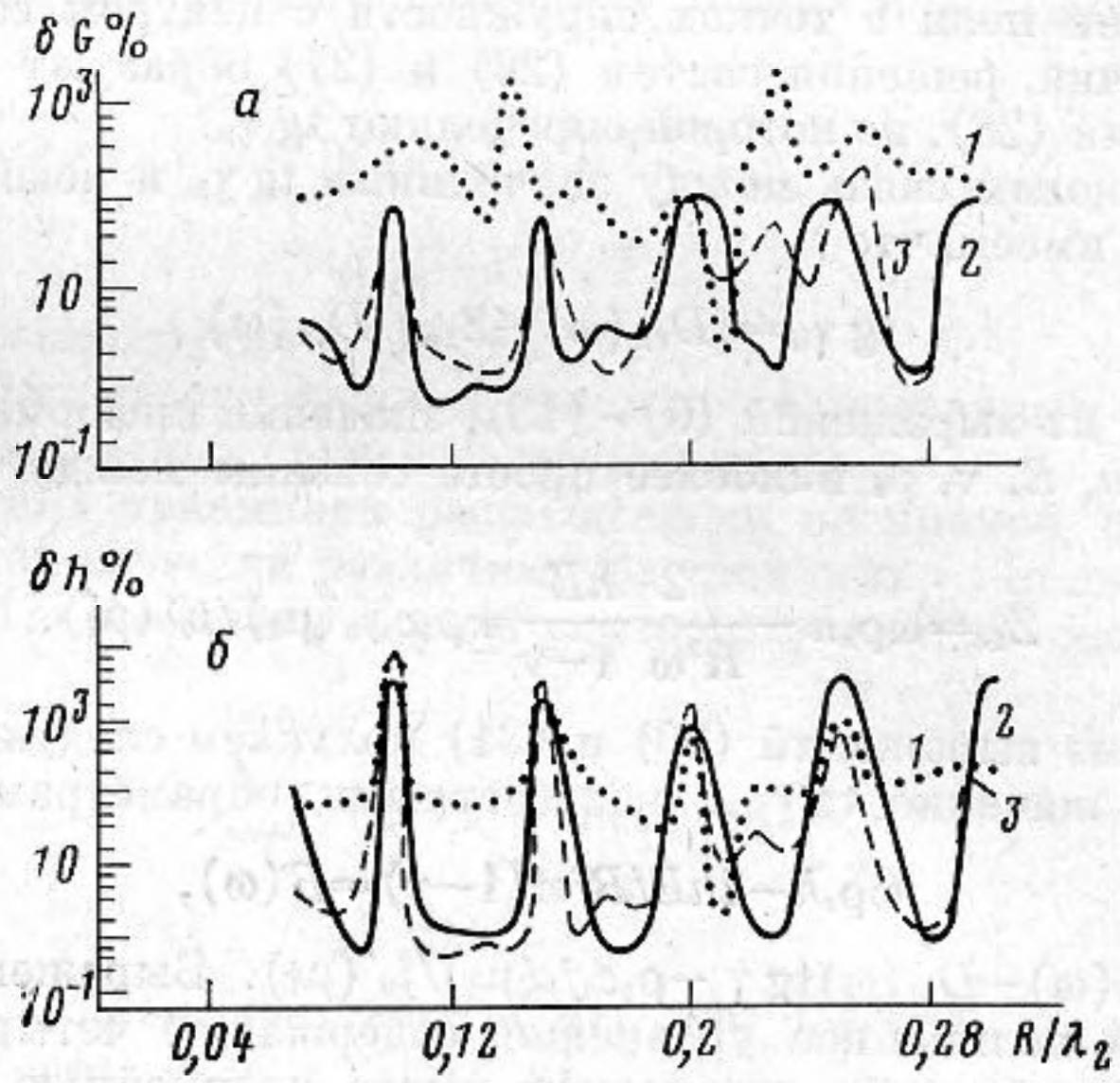
$$\omega_i y_1 - \frac{2}{R^2\omega_i} y_2 = B(\omega_i), \quad i=1, 2, \tag{33}$$

и ее определитель будет всегда отличен от нуля $\omega_1 \neq \omega_2$, поэтому в этом случае решение будет единственно. Решая систему (33), получаем для нахождения четырех неизвестных параметров оболочки лишь два уравнения

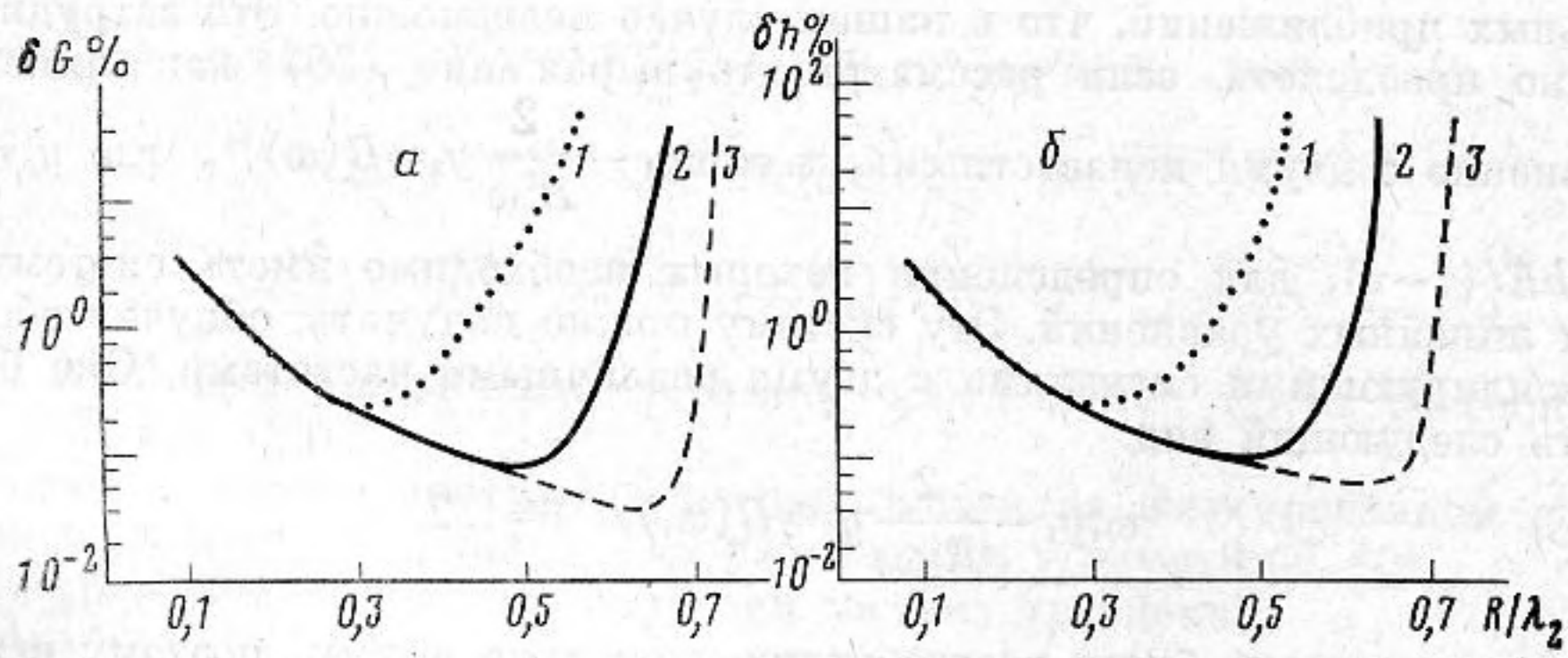
$$\rho_s h = y_1, \quad hE/(1-\nu) = y_2. \tag{34}$$



Фиг. 1. Случай общего расположения приемников, $(\theta_{m+1}-\theta_m)/\theta_0=1$, $(r_{m+1}-r_m)/R=10$



Фиг. 2. Приемники расположены на различных расстояниях от центра оболочки, на луче, проведенном под углом $\theta_p=\pi/2$, $(r_{m+1}-r_m)/R=10$



Фиг. 3. Приемники расположены на окружности радиуса r_p, проведенной из центра оболочки, $r_p/R=100$

Далее поступим следующим образом. Введем понятие характеристического параметра материала оболочки $G=E/(1-\nu)\rho_s$, величина которого для данного материала постоянна. Используя найденные решения y_1 и y_2, получим, что значение характеристического параметра для неизвестного материала оболочки равно $G_x=y_2/y_1$. И наконец, располагая набором характеристических параметров различных материалов G_i, делаем заключение, что оболочка состоит из материала, для которого $|G_i-G_x|$ принимает минимальное значение, и считаем, что $E=E_i$, $\nu=\nu_i$, $\rho_s=\rho_{si}$. Из (34) получаем, что толщина оболочки равна $h=y_1/\rho_{si}$.

Изложенный выше алгоритм был промоделирован на ЭВМ «ЕС 1022» для случая алюминиевой оболочки с $h/R=0{,}02$, заполненной водой. На фиг. 1, *а*, *б*, 2, *а*, *б*, 3, *а*, *б* представлены частотные зависимости относительных погрешностей характеристического параметра материала оболочки δG и толщины δh при различных вариантах расположения приемников. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют количеству приемников $N_p=8$, 10, 12. Частота первой зондирующей волны была фиксирована во всех трех вариантах, так что $R/\lambda_1=0{,}04$. В тех случаях (см. фиг. 1 и 2), когда приемники удалены на различные расстояния от центра оболочки, δG и δh существенным образом зависят от частоты. Это связано с тем, что матрицы коэффициентов $a_{mn}^{(r)}$ и $a_{mn}^{(i)}$ содержат сферические функции Бесселя $j_n(\omega r_n/c)$ и $n_n(\omega r_m/c)$, зависящие от частоты, что приводит при частотах, соответствующих значениям $R/\lambda_2=0{,}1$; 0,15; 0,2; 0,25, к резкому возрастанию числа обусловленности систем ($\mathrm{cond}\simeq 10^{13}$ и более). Поэтому при решении систем (20), (21), (24) и (25) возникают большие погрешности, что и приводит в конечном итоге к резкому возрастанию δG и δh. Наблюдается также некоторый рост среднего уровня δG и δh с увеличением частоты. Это связано с возрастанием погрешностей при вычислениях $j_n(\omega r_m/c)$ и $n_n(\omega r_m/c)$ с ростом значений аргумента. Средний уровень δG и δh возрастает также с уменьшением числа приемников, что связано с ростом погрешностей $Y_n^{(r)}$ и $Y_n^{(i)}$ при уменьшении порядка систем уравнений (20), (21), (24) и (25).

Совсем иной характер имеют зависимости δG и δh от частоты при регистрации поля приемниками, расположенными на окружности радиуса r_p (фиг. 3, *а*, *б*). В этом случае наблюдается монотонное спадание погрешностей δG и δh с ростом частоты, что связано с уменьшением степени зависимости между уравнениями частотной системы (33), поскольку возрастает разность частот и поэтому решения становятся более точными. Отсутствие резких выбросов, как и в предыдущих случаях, связано с тем, что коэффициенты систем (26) и (27) $a_{mn}=P_n(\cos\theta_m)$ не зависят от частоты. После достижения минимальных значений при $(R/\lambda_2)_{min}\delta G$ и δh начинают возрастать, что опять связано с ростом погрешностей, возникающих при вычислении $j_n(\omega r_p/c)$ и $n_n(\omega r_p/c)$ по мере увеличения частоты. Значения $(R/\lambda_r)_{min}$, при которых δG и δh принимают минимальные значения тем меньше, чем меньшее число приемников используется для регистрации поля. Аналогичная зависимость наблюдается и для ширины частотного диапазона, где возможно эффективное использование метода. Это также объясняется ростом погрешностей решений $Y_n^{(r)}$, $Y_n^{(i)}$ систем (26) и (27) с уменьшением их порядка.

Проведенные выше исследования показывают, что наиболее эффективна с точки зрения величины погрешностей регистрация поля на сферической поверхности, концентрической рассматриваемой сферической оболочке.

Вопрос об оптимальном частотном диапазоне, используемом в данном алгоритме, является весьма сложным, особенно в тех случаях, когда расстояния от центра оболочки до приемников различны. Для нахождения частот зондирования можно воспользоваться, например, методом проб, облучая оболочку несколькими волнами с различными частотами и отбирая среди них те, которые дают наименьшие числа обусловленности простран-

ственно-частотных систем (20), (21) при фиксированных r_m, θ_m и достаточно далеко разнесены друг от друга по частоте. Окончательное решение вопроса о нахождении оптимального частотного диапазона, в котором предлагаемый алгоритм будет устойчив, требует проведения дополнительных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Метсавээр Я. А.* Об определении параметров заполненных жидкостью оболочек по эхосигналам.– Акуст. журн., 1977, т. 23, № 1, с. 170–171.
2. *Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах. М.: Наука, 1979.
3. *Метсавээр Я. А.*, Эхосигналы от упругих оболочек в жидкости. Автореф. дис. на соискание уч. ст. докт. физ-мат. наук. М.: МГУ, 1979.
4. *Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхосигналы от упругих объектов. Т. 2. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1974.
5. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.
6. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

Научно-исследовательский институт прикладных физических проблем при Белорусском государственном университете

Поступила в редакцию 23.VI.1983