

ность возникновения неустойчивости. Сравнивая величину $\text{Im } \delta$ в этих трех случаях, нетрудно убедиться в том, что $\text{Im } \delta$ максимальна в последнем случае, так что последнее выражение для $\text{Im } \delta$ и будет определять порог появления неустойчивости. Он находится из условия $\text{Im } \delta = v_0 Q(q, k)$, соответствующего изменению знака коэффициента поглощения, которое дает

$$|F_1(0)|_{\text{пор}}^2 = \frac{K_{11}\rho}{2\gamma_1|2\alpha_2 + \alpha_5|} \frac{q^2}{k^2}.$$

Отсюда, используя формулу (1), получаем следующее выражение для порогового смещения:

$$u_{\text{пор}} = 2ha [K_{11}\rho / (2\gamma_1|2\alpha_2 + \alpha_5|)]^{1/2}, \quad (4)$$

где через a обозначено отношение q/k . Для кристалла МБА при $h=100$ мкм это выражение дает $u_{\text{пор}} \approx 10^{-5}$ см.

При превышении порогового смещения (4) возникают синусоидальные изменения ориентации молекул вдоль толщины слоя с волновыми числами $k = \pi/h, 2\pi/h, \dots$, а также изменения ориентации молекул вдоль длины слоя с волновыми числами q , большими k . При этом появляются все частоты, начиная с частоты, близкой к нулю. Изменения ориентации молекул сопровождаются их перемещениями с той же периодичностью.

Пороговое смещение (4) оказывается пропорциональным толщине слоя и не зависящим от частоты, если пренебречь частотной зависимостью коэффициентов $K_{11}, \gamma_1, \alpha_2, \alpha_5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чабан И. А. Виброгидродинамическая неустойчивость жидких кристаллов. — Акуст. журн., 1978, т. 24, № 2, с. 260–270.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14.VI.1983

УДК 534.221.1

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ЗВУКА В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Чуичузов И. П.

В работе [1] было найдено дальнейшее поле расположенного на земле точечного излучателя звука в неоднородно-движущейся, но изотермической атмосфере. Нетрудно обобщить полученное решение на случай, когда средняя температура в приземном слое атмосферы распределена с высотой по закону $T(z) = T_0[1 + \Delta(1 - e^{-z/H})]$, причем температурный градиент Δ/H (H — характерный масштаб изменения температуры, $|\Delta| \ll 1$) может быть как положительным, так и отрицательным.

Уравнение, описывающее распределение амплитуды квазипотенциала ψ_0 поля гармонического источника $\psi_0 = \psi_0 e^{i\omega t}$ имеет вид [2]

$$\Delta\psi_0 + k_0^2 n^2(z) \psi_0 - i[2k_0\beta(z)n^2(z) + \beta''(z)/k_0] \partial\psi_0/\partial x = 0, \quad (1)$$

где $n^2(z) \approx 1 - \Delta(1 - e^{-z/H})$ — квадрат показателя преломления покоящейся среды, $\beta(z) = V_x(z)/c_0 = \beta_0(1 - e^{-z/h})$ — нормированная на скорость звука горизонтальная компонента скорости ветра, $\beta_0 = \beta(z)|_{z \rightarrow \infty}$. На поверхности земли $z=0$ вертикальная компонента колебательной скорости v_z обращается в нуль всюду, за исключением точки нахождения источника $x=y=z=0$:

$$v_z|_{z=0} = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{i\beta'}{k_0} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)_{z=0} = 2\pi\delta(\rho), \quad (2)$$

где $\rho = \{x, y\}$.

После преобразования Фурье

$$\psi_0 = e^{ik_0\beta_0 x} \int \tilde{\varphi}(\xi, z) e^{-i\xi\rho} d\xi \quad (3)$$

и подстановки (2) в (1) получим

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}}{dz^2} + [k_0^2(1-\Delta) - \xi^2 + \beta_0(2 + 1/k_0^2 h^2)k_0\xi x e^{-z/h} + \Delta k_0^2 e^{-z/H}] \tilde{\varphi} = 0. \quad (4)$$

В последнем уравнении, как и в (1), удержали только линейные по β_0 и Δ члены. Решение этого уравнения в общем случае выражается в гипергеометрических функциях. В частном случае $h=H$ оно было исследовано в [1].

Используя полученные в [1] результаты, можно выписать решение краевой задачи (1)–(2) в виде (см. также [3] и [4]) $\psi_0 = \psi_{\text{волн}} + \psi_{\text{бок}}$.

Первое слагаемое представляет волноводную часть решения (5), которая состав-

ляет дискретный спектр поля

$$\psi_{\text{волн}} = i e^{i k_0 \beta_0 x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z, \rho, \varphi) e^{-i(\xi_n \rho - \pi/4)}, \quad (6)$$

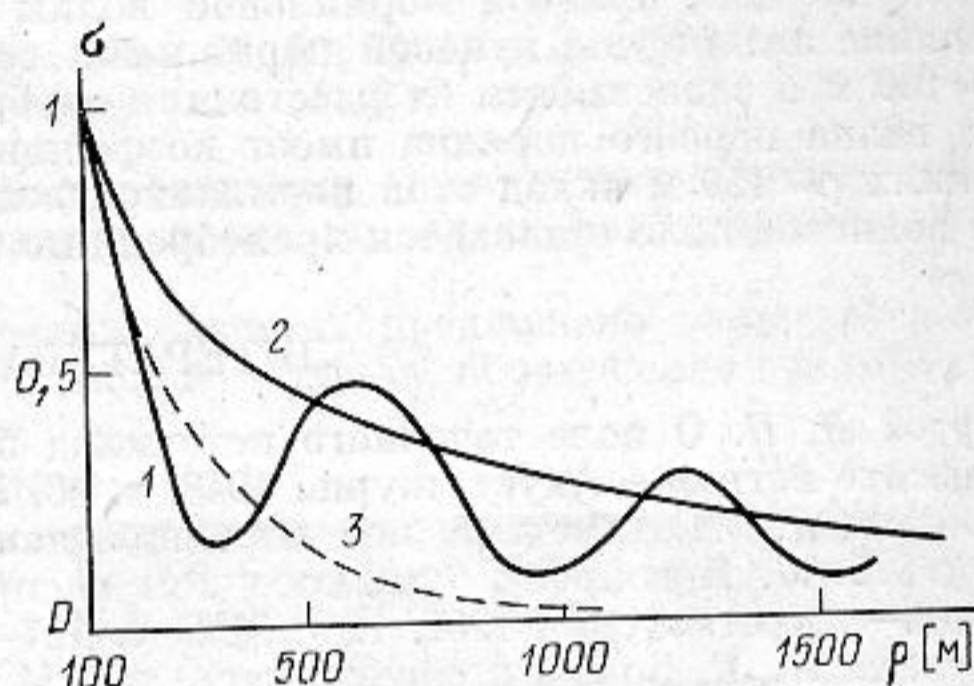
где

$$A_n = \left(\frac{2\pi}{\xi_n \rho} \right)^{1/2} \frac{\nu_n J_{\nu_n}(t_n e^{-z/2h})}{[J_{\nu}(t) + (\nu-t) \partial J_{\nu}/\partial \nu]_{t=\xi_n}},$$

— цилиндрические координаты: φ — азимут между направлением на точку наблюдения и направлением ветра $\varphi=0$.

Здесь $J_{\nu}(t)$ — функция Бесселя с аргументом $t=2(\Delta k_0^2 h^2 + \beta_0 k_0 \xi U_0 h^2 \cos \varphi)^{1/2}$ и

Распределение относительной амплитуды поля $\sigma = |\psi_0(\rho)| / |\psi_0(\rho = 100 \text{ м})|$ в зависимости от расстояния ρ 1 — соответствует случаю $\cos \varphi = 1$, $\lambda = 10 \text{ м}$; 2 — $\cos \varphi = 1$, $\lambda = 30 \text{ м}$; 3 — нулевая нормальная волна при $\cos \varphi = -1$



порядком $\nu = 2h[\xi^2 - k_0^2(1-\Delta)]^{1/2}$, $U_0 = 2 + 1/(k_0^2 h^2)$, ξ_n — корни уравнения

$$J_{\nu}'(t) = 0. \quad (7)$$

Число нормальных волн в сумме (6) на определенной частоте ω ограничено условием $\text{Re } \nu_n > 0$, которое появляется из требования ограниченности или обращения в нуль амплитуд A_n при $z \rightarrow \infty$. Из (6) видно, что волновод образуется только при действительном значении $\tilde{t} = 2(\Delta + \beta_0 U_0 \cos \varphi)^{1/2} k_0 h$ (\tilde{t} — параметр, называемый часто «эффективной шириной» волновода). Другими словами, образование волновода, как и следовало ожидать, возможно, если поправка к показателю преломления $n = 1 - \delta n$, обусловленная неоднородным ветром и температурной стратификацией, положительна: $\delta n = \Delta + 2\beta_0 \cos \varphi > 0$.

При $|\tilde{t}| \gg 1$, пользуясь асимптотикой функции Бесселя, можно приближенно найти корни уравнения (7): $\xi_n = [k_0^2(1-\Delta) + (\nu_n/2h)^2]^{1/2}$, $\nu_n = 2(\tilde{t} - \pi/4 - \pi n)/\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Второе слагаемое в (5) описывает так называемую боковую волну, которая на больших высотах переходит в сферическую волну и убывает с расстоянием как $1/(\rho^2 + z^2)^{1/2}$ (см. [3]). На малых высотах $z \ll 2h$ и при $|\tilde{t}| \gg 1$ решение, описывающее боковую волну, имеет вид

$$\psi_{\text{бок}} = B(\rho, \varphi) e^{z/4h} \cos[\tilde{t}(1 - e^{-z/2h})] e^{-i k_0 \rho(1 - \beta_0 \cos \varphi - \Delta)}, \quad (9)$$

где

$$B(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{2\pi i}{\tilde{t} \sin^2(\tilde{t} - \pi/4)} \left(\frac{k_0 h^2}{\rho^2} \right), & \omega \neq \omega_n = \left(\frac{\pi/4 + \pi n}{\beta_0 U_0 \cos \varphi + \Delta} \right)^{1/2} c_0/2h \\ -2/\pi \tilde{t} \rho, & \omega = \omega_n, \end{cases} \quad (10)$$

где ω_n — критические частоты волновода.

В общем случае интерференция нормальных волн и боковой волны приводит к пространственной модуляции результирующей амплитуды и фазы волнового поля, описываемого решением (5–6) и (10). Проанализируем полученные результаты для конкретного случая типичных параметров стратификации атмосферы в приземном слое. Пусть максимальный ветер $V_0 = 6 \text{ м/с}$, максимальное увеличение температуры $\Delta T = T - T_0 = 3 \text{ град}$, ($\Delta \sim 10^{-2}$), а характерный масштаб $h = 30 \text{ м}$, $c_0 = 330 \text{ м/с}$. Тогда на длине волны $\lambda = h = 30 \text{ м}$ «эффективная» ширина волновода по направлению ветра $\tilde{t} = 2,8$.

Уравнение (7) в этом случае имеет один корень (см. [5]): $\xi_0 = 1,002$, $k_0 = 0,21 \text{ м}^{-1}$, соответствующий единственной нормальной волне нулевого порядка.

Оценивая ее амплитуду на расстоянии 100 м по формуле (6) и амплитуду боковой волны из (10), нетрудно убедиться, что последняя, начиная с этого расстояния, на порядок меньше первой. Поэтому на расстояниях, больших 100 м, можно пренебречь боковой волной.

При $\lambda = 10 \text{ м}$, $\tilde{t} = 8,4$ существуют три нормальные волны, распространяющиеся с различными фазовыми скоростями. Расчет по формуле (6) их результирующей амплитуды $|\psi_0|$ в зависимости от расстояния приводит к пространственному распре-

делению, изображенному на фигуре (кривая 1), 2 изображает распределение амплитуды нулевой нормальной волны.

В направлении против ветра ($\cos \varphi = -1$) при выбранных нами параметрах атмосферы $\delta n = \Delta - 2\beta_0 = -3 \cdot 10^{-2} < 0$. В этом направлении происходит антиволноводное распространение звука, так как ветер «разрушает» волновод, создаваемый положительным температурным градиентом.

Решение по-прежнему представляется в виде ряда (6), но в этом случае параметр \tilde{t} принимает только мнимые значения, а уравнение (7) имеет только комплексные корни ξ_n . Это означает, что против ветра каждая нормальная волна ослабляется с расстоянием, как $\rho^{-1/2} e^{-\alpha_n \rho}$, где $\alpha_n = -\text{Im} \xi_n > 0$. При больших значениях параметра $|\tilde{t}| \gg 1$ можно найти приближенное значение α_n

$$\alpha_n \approx 2(\pi h)^{-1} (n + 3/4) (2\beta_0 - \Delta)^{1/2}. \quad (11)$$

В этом случае для нулевой нормальной волны получим, что $\alpha_0 \approx 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$.

Спадание амплитуды нулевой нормальной волны, нормированной на амплитуду при $\rho_0 = 100 \text{ м}$ в зависимости от расстояния изображено на фигуре (кривая 3). Нормальная волна первого порядка имеет коэффициент затухания $\alpha_1 \approx 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$. На расстояниях $\rho \gg 150 \text{ м}$ вклад этой нормальной волны и волн более высокого порядка в общее волновое поле становится пренебрежимо малым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чунгузов И. П. О поле точечного источника звука в атмосфере с неоднородным по высоте ветром. — Акуст. журн., 1948, т. 30, № 4, с. 546–552.
2. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
3. Газарян Ю. Л. К вопросу о волноводном распространении звука в неоднородных средах. — Акуст. журн., 1957, т. 3, № 2, с. 127–139.
4. Бреховский Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лот Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968.

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24.III.1983