АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 1 | АКАДЕМИЯ НАУК СССР | Январь Февраль

Основан в 1955 г. | МОСКВА | *Выходит 6 раз в год*

УДК 534.612.4

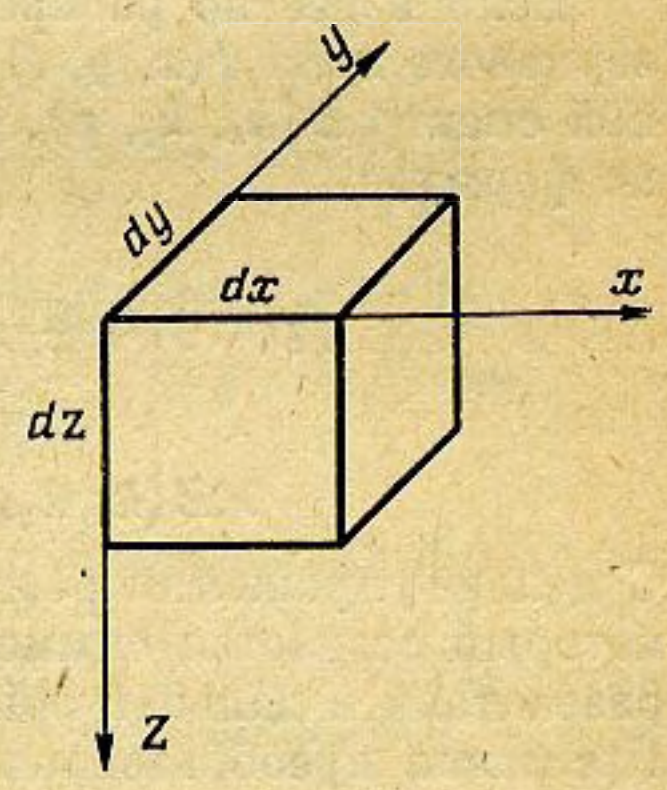
К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ АКУСТИЧЕСКОГО РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ

Ананьев В. А., Домаркас В. И., Саяускас С. И.

Приведены результаты теоретических расчетов переходных характеристик поверхности жидкости с учетом ее физических свойств, а также структуры воздействующего ультразвукового поля.

Вопросы динамики поверхности жидкости при воздействии акустического радиационного давления приобретают первостепенное значение при создании методов двухэкспозиционной голографической интерферометрии для исследования ультразвуковых полей посредством измерения рельефа поверхности жидкости. При этом вторая голограмма должна регистрировать установившееся состояние рельефа, т. е. по окончании переходного процесса движения поверхности жидкости при воздействии на нее ультразвуковым полем. Экспериментальным исследованиям переходных характеристик поверхности воды посвящена работа [1].

С целью выявления влияния различных факторов на переходной процесс опишем математически движение поверхности жидкости под действием акустического радиационного давления. Как известно, радиационное давление $P(x, y)$ в точке поверхности жидкости с координатами x, y связана с интенсивностью ультразвуковой волны $I(x, y)$ в этой точке соотношением $P(x, y)=2I(x, y)/c$, где c — скорость ультразвука. С другой стороны, интенсивность $I(x, y)$ связана со смещением $\xi(x, y)$ поверхности жидкости уравнением равновесия [2] $2I(x, y)/c=\rho g\xi(x, y)-\gamma[\partial^2\xi(x, y)/\partial x^2+\partial^2\xi(x, y)/\partial y^2]$, где ρ, γ — соответственно плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости, g — ускорение свободного падения.



Фиг. 1. Элементарный объем жидкости поверхностного слоя

Уравнение движения элементарного объема $dxdydz$ приповерхностного слоя жидкости, показанного на фиг. 1, можно записать следующим образом:

$$\rho\partial^2\xi/\partial t^2-\eta(\partial^3\xi/\partial x^2\,\partial t+\partial^3\xi/\partial y^2\,\partial t)-\gamma(\partial^2\xi/\partial x^2+\partial^2\xi/\partial y^2)\,\partial f(z)/\partial z\Big|_{z=0}+$$

$$+\rho g\xi\,\partial f(z)/\partial z\Big|_{z=0}-\frac{2}{c}I\partial F(z)/\partial z\Big|_{z=0}=0, \qquad (1)$$

© Издательство «Наука», «Акустический журнал», 1984 г.

где $F(z)$ — функция, учитывающая влияние радиационного давления P на частицы приповерхностного слоя жидкости, $f(z)$ — функция, определяющая зависимость смещения приповерхностных слоев жидкости от координаты z. При этом координата z определяет положение слоя жидкости в невозмущенном состоянии.

Применяя к уравнению (1) преобразование Фурье по пространственным координатам и преобразование Лапласа по времени, перейдем к алгебраическому уравнению

$$[\rho p^2+(k_x^2+k_y^2)\eta p-i(k_x^2+k_y^2)\gamma k_z-i\rho g k_z]\times$$
$$\times D(k_x,\ k_y,\ p)+i(2/c)k_z B(k_x,\ k_y,\ p)=0, \qquad (2)$$

где $D(k_x, k_y, p)$, $B(k_x, k_y, p)$ — пространственно-временные спектры смещения $\xi(x, y, t)$ и интенсивности $I(x, y, t)$; k_x, k_y, k_z — волновые числа пространственных гармоник по осям x, y, z; p — комплексная временная частота.

Предполагалось также, что пространственно-временные спектры выражений $\xi(x, y, t)f(z)$ и $I(x, y, t)F(z)$ имеют соответственно вид [3] $D(k_x, k_y, p)\exp(-ik_z z)$ и $B(k_x, k_y, p)\exp(-ik_z z)$. Принимая во внимание, что $k_z=i(p^2/c^2+k_x^2+k_y^2)^{1/2}$, и учитывая, что поверхность жидкости действует как низкочастотный пространственный фильтр [4], примем, что $k_z\approx\approx i(k_x^2+k_y^2)^{1/2}$. Тогда уравнение (2) запишется следующим образом:

$$[\rho p^2+(k_x^2+k_y^2)\eta p+(k_x^2+k_y^2)\gamma(k_x^2+k_y^2)^{1/2}+$$
$$+\rho g(k_x^2+k_y^2)^{1/2}]D(k_x,\ k_y,\ p)-(2/c)(k_x^2+k_y^2)^{1/2}B(k_x,\ k_y,\ p)=0. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) в спектральной области имеет вид $D(k_x, k_y, p)=$ $=(2/c)B(k_x, k_y, p)\ K(k_x, k_y, p)$, где передаточная функция

$$K(k_x, k_y, p)=\frac{(k_x^2+k_y^2)^{1/2}}{\rho p^2+(k_x^2+k_y^2)^{1/2}[(k_x^2+k_y^2)^{1/2}\eta p+(k_x^2+k_y^2)\gamma+\rho g]}. \qquad (4)$$

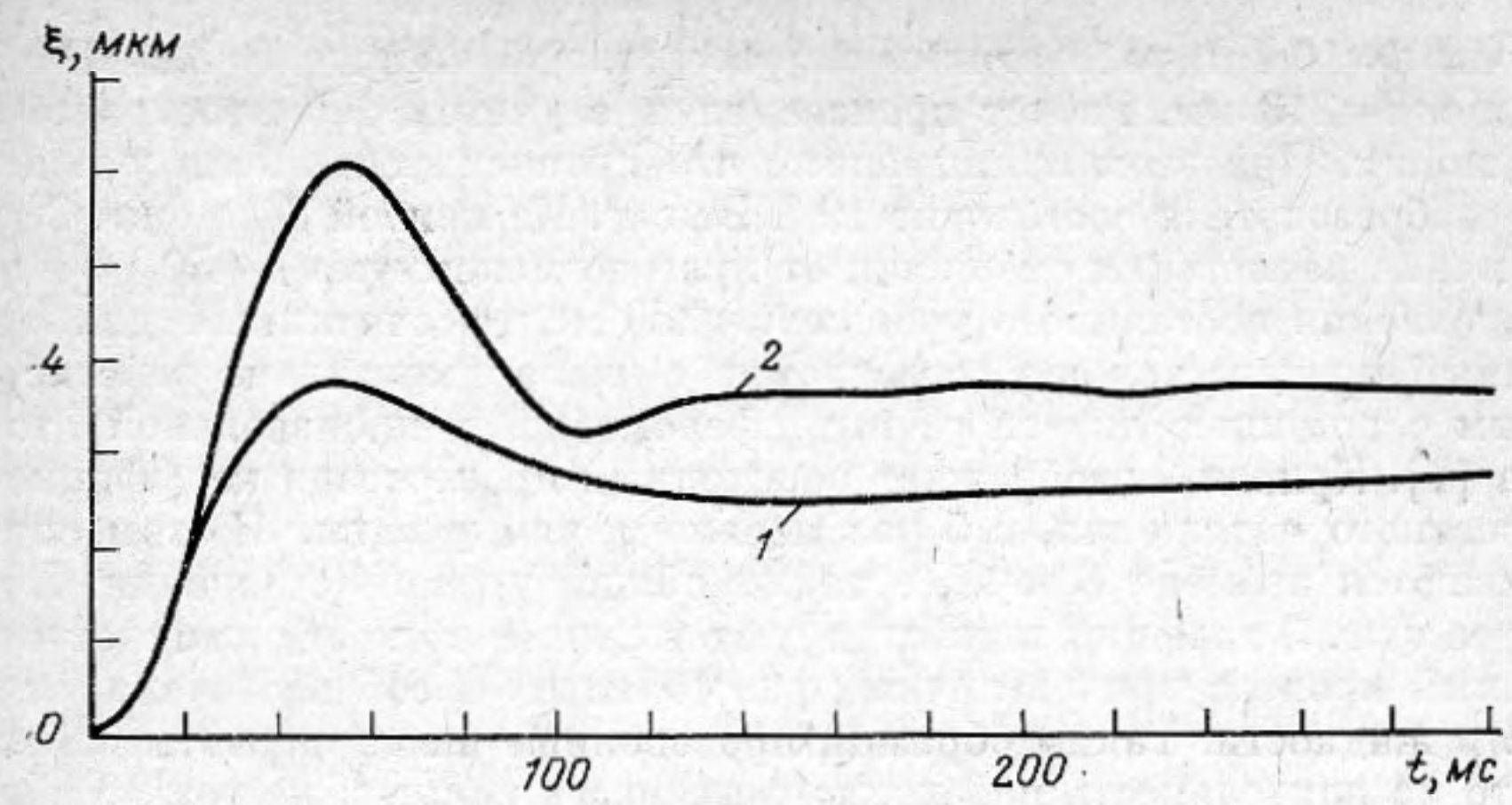
Если известно распределение интенсивности воздействующего ультразвукового поля $I(x, y, t)$, а следовательно, и его пространственно-временнóй спектр $B(k_x, k_y, p)$, распределение смещения $\xi(x, y, t)$ определяется по формуле

$$\xi(x,y,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x\,dk_y\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} dp\,(2/c)\times$$
$$\times B(k_x,k_y,p)K(k_x,k_y,p)\exp[i(k_x x+k_y y)+pt]. \qquad (5)$$

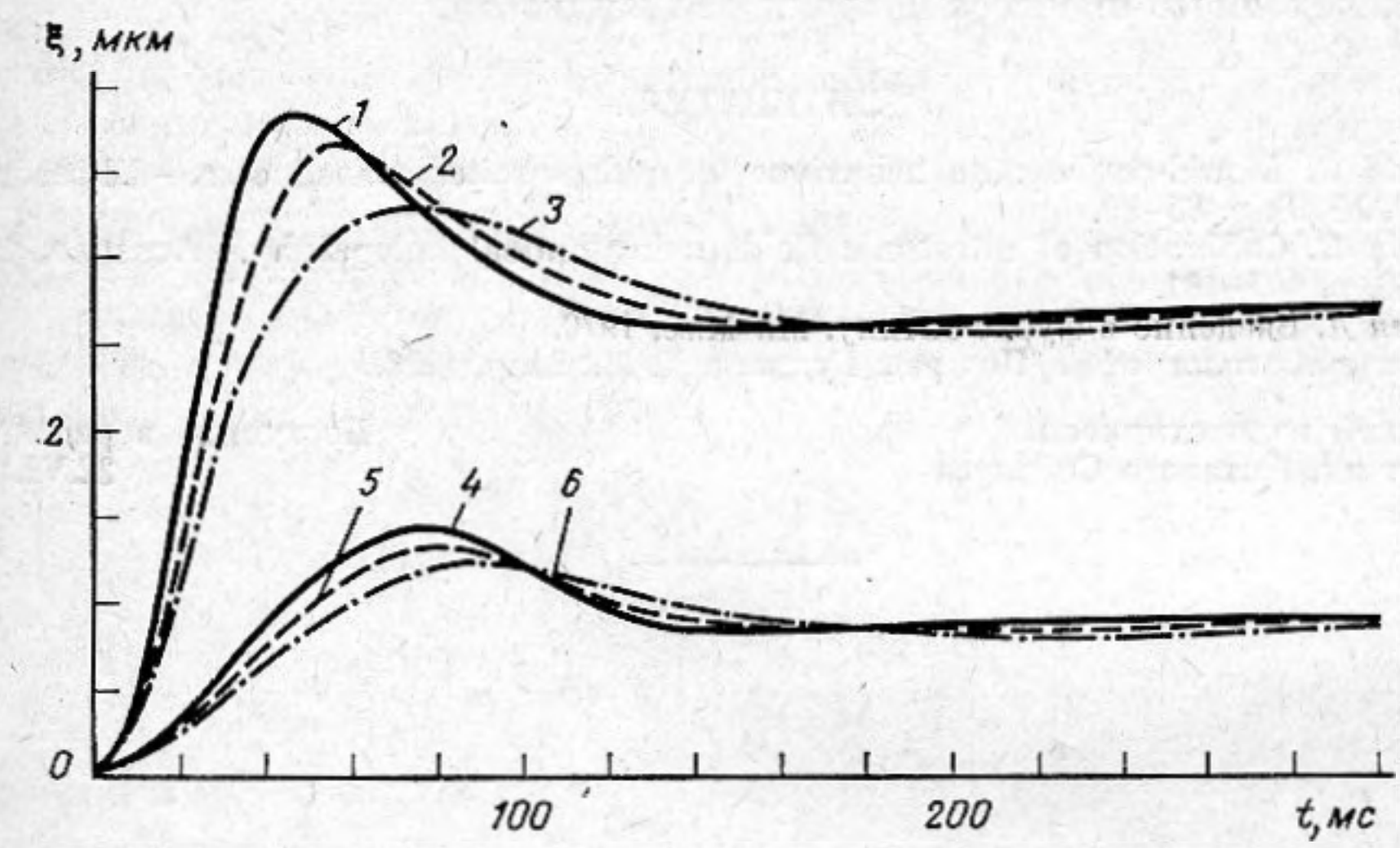
С целью упрощения рассмотрим смещение центральной точки рельефа, который создается симметричным ультразвуковым полем круглого преобразователя в дальней зоне [3], начинающего действовать с момента $t=0$. Применив преобразование Ханкеля по пространственной координате r и Лапласа по времени, получим пространственно-временной спектр такого распределения интенсивности в виде

$$B(k_r,p)=2\pi\iint\limits_{0}^{\infty} I(r,t)J_0(k_r r)rY(t)\exp(-pt)\,dr\,dt=$$
$$=(d^2/4)\left[2\arccos\frac{k_r l}{kd}-\frac{k_r 2l}{kd}\left(1-\frac{k_r^2 l^2}{k^2 d^2}\right)^{1/2}\right]\mathrm{circ}\left(\frac{k_r l}{kd}\right)\frac{1}{p}, \qquad (6)$$

где $J(r,t)=\left(\frac{kd^2}{8l}\right)^2\left[\frac{2J_1(k\,dr/2l)}{k\,dr/2l}\right]^2$ — поле круглого преобразователя в дальней зоне; $r=(x^2+y^2)^{1/2}$; J_0, J_1 — функции Бесселя 1-го рода нулевого и первого порядков; $k_r=(k_x^2+k_y^2)^{1/2}$; $Y(t)$ — функция Хэвисайда; круговая функция $\mathrm{circ}\left(\frac{k_r l}{kd}\right)=\begin{cases}1, & k_r\leqslant kd/l;\\ 0, & k_r>kd/l;\end{cases}$ k — волновое число ультразвука; d —



Фиг. 2. Переходные характеристики воды при воздействии ультразвукового поля: *1* – $\gamma=7{,}28\cdot10^{-2}$ Н/м; *2* – $\gamma=1{,}46\cdot10^{-2}$ Н/м



Фиг. 3. Переходные характеристики поверхности жидкости в зависимости от вязкости жидкости и структуры ультразвукового поля: *1*, *4* – $\eta=1{,}05\cdot10^{-3}$ кг/мс; *2*, *5* – $\eta=0{,}3$; *3*, *6* – $\eta=0{,}7$ кг/мс; *1*, *2*, *3* рассчитаны при $l=213$ мм; *4*, *5*, *6* – при $l=426$ мм

диаметр преобразователя; l – расстояние от преобразователя до поверхности воды.

Подставив выражения (4) и (6) в формулу (5) и решив внутренний интеграл обратного преобразования Лапласа, получим выражение, описывающее движение центральной точки рельефа

$$\xi(0,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{c}\int\limits_0^\infty\left[2\arccos\frac{k_r l}{kd}-\frac{k_r 2l}{kd}\left(1-\frac{k_r^2 l^2}{k^2 d^2}\right)^{1/2}\right]\times$$
$$\times\operatorname{circ}\left(\frac{k_r l}{kd}\right)k_r\frac{1}{\gamma k_r^2+\rho g}\left[1-\exp\left(-\frac{\eta k_r^2}{2\rho}t\right)\left(\frac{\eta k_r^2}{2\rho}\frac{\sin\omega t}{\omega}+\cos\omega t\right)\right]dk_r, \tag{7}$$

где

$$\omega=\sqrt{\frac{\gamma k_r^3}{\rho}+gk_r-\left(\frac{\eta k_r^2}{2\rho}\right)^2}.$$

Эта формула справедлива при условии $\gamma k_r^3/\rho+gk_r>(\delta k_r^2/2\rho)^2$, которое удовлетворяется для большинства жидкостей. На фиг. 2 показаны рассчитанные по формуле (7) переходные характеристики центральной точки рельефа на поверхности воды, создаваемого круглым преобразователем

диаметром $d=10$ мм, работающим на резонансной частоте $f=3{,}2$ МГц, на расстоянии $l=213$ мм. Расчет производился с учетом 100 пространственных гармоник. При этом принималось, что интенсивность поля у поверхности преобразователя составляет 10 МВт/см^2. Из кривой *1* на фиг. 2 видно, что время нарастания смещения от нуля до максимума $t_r \approx 50$ мс и время установления постоянного уровня $t_\infty \approx 250$ мс. Рассчитанный для воды переходный процесс хорошо согласуется с экспериментально зарегистрированным с помощью лазерного интерферометра в произвольной точке рельефа [1]. Кривая *2* отображает переходный процесс при коэффициенте поверхностного натяжения, в 5 раз меньшем, чем у воды. В этом случае увеличиваются времена t_r и t_∞, а также общий уровень смещения. Показанные на фиг. 3 графики иллюстрируют влияние вязкости жидкости на переходный процесс при различных расстояниях преобразователя от поверхности жидкости. Таким образом, проведенные выше расчеты показывают, что на длительность переходного процесса влияют не только физические свойства жидкости, но также структура ультразвукового поля. Чем больше расстояние преобразователя от поверхности жидкости, тем больше время переходного процесса поверхности жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reibold R.* Liquid-surface: its behaviour for pulse-excited transducers.— Ultrasonics, 1980, № 18, p. 85–89.
2. *Reibold R.* Calibration of ultrasonic fields using optical holography.– Acustica, 1980, № 46, p. 149–161.
3. *Гудмен Д.* Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970.
4. Применения голографии/Под ред. Гудмена Д. М.: Мир, 1973.

Каунасский политехнический институт им. Антанаса Снечкуса

Поступила в редакцию 22.VI.1982