ЛИТЕРАТУРА

1. *Смоленский Г. А., Леманов В. В., Недлин Г. М., Петров М. П., Писарев Р. В.* Физика магнитных диэлектриков. Л.: Наука, 1974. 456 с.

Институт металлургии
Уральского научного
центра Академии наук
СССР

Поступила в редакцию
15.III.1982

УДК 530.145.6

ЕДИНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ОТРАЖЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Белишев М. И.

Рассматривается известная задача: из однородного полупространства $z<0$, граничащего со слоисто-неоднородным полупространством $z>0$, на границу раздела $z=0$ под углом $\theta_0 (0\leqslant\theta_0<\pi/2)$ падает плоская волна. Скорости распространения волн в полупространствах равны соответственно $c_0=\text{const}$ и $c=c(z)$, коэффициент преломления $n(z)|_{z>0}=c_0/c(z)$. В стационарной форме задача сводится к нахождению решения $u(z, \omega)$ уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z, \omega) + \omega^2 q(z) u(z, \omega) = 0, \qquad -\infty<z, \qquad \omega<\infty, \tag{1}$$

где ω – частота, $q(z)|_{z>0}=c_0^{-2}[n^2(z)-\sin^2\theta_0]$, $q(z)|_{z<0}=\cos^2\theta_0/c_0^2=\text{const}$, причем

$$u(z, \omega)|_{z<0}=e^{i\omega(\cos\theta_0/c_0)z}+r(\omega)e^{-i\omega(\cos\theta_0/c_0)z}, \tag{2}$$

т. е. поле в однородном полупространстве является суперпозицией падающей и отраженной волн; $r(\omega)$ – коэффициент отражения, подлежащий определению. Преобразование Фурье по $\omega u(z, \xi)=(1/2\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega\xi)u(z, \omega)d\omega$ приводит к двойственной нестационарной задаче:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z, \xi) - q(z)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(z, \xi) = 0, \qquad -\infty<z, \qquad \xi<\infty, \tag{3}$$

$$u(z, \xi)|_{z<0}=\delta(\xi-(\cos\theta_0/c_0)z)+r(\xi+(\cos\theta_0/c_0)z), \tag{4}$$

где $\delta(\ldots)$ – дельта-функция, $r(\xi)=(1/2\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega\xi)r(\omega)d\omega$.

Для всех рассматривавшихся ранее профилей $n(z)$ конкретного вида задача (1), (2) решалась по следующей схеме: а) с привлечением соображений физического характера выбиралось вполне определенное решение $E(z, \omega)$ уравнения (1) при $z>0$, б) по «физическому» решению $E(z, \omega)$ с использованием представления (2) и условий непрерывности u, u_z' при $z=0$ строилось решение всей задачи: преломленное поле

$$u(z, \omega)|_{z\geqslant 0} = 2i\omega\frac{\cos\theta_0}{c_0}\left[i\omega\frac{\cos\theta_0}{c_0}E(0, \omega)+E_z'(0, \omega)\right]^{-1}\cdot E(z, \omega) \tag{5}$$

и коэффициент отражения

$$r(\omega)=\left[i\omega\frac{\cos\theta_0}{c_0}E(0, \omega)+E_z'(0, \omega)\right]^{-1}\cdot\left[i\omega\frac{\cos\theta_0}{c_0}E(0, \omega)-E_z'(0, \omega)\right] \tag{6}$$

Особо отметим следующее обстоятельство: физические условия, привлекавшиеся для выделения $E(z, \omega)$, в разных случаях ставились по-разному, они существенным об-

разом использовали особенности поведения $n(z)$. Приведем примеры. Пусть $n(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} n(\infty) > (\sin\theta_0/c_0)$ (т. е. $q(z)\to q(\infty)<0$). Неоднородности сосредоточены на конечном расстоянии, на бесконечности полупространство однородно и от него происходит обычное отражение. При конечных z допускается перемена знака $q(z)$, что отвечает наличию в среде высокоскоростных слоев с $n(z)<\sin\theta_0/c_0$ (т. е. $q(z)<0$), от которых происходит полное внутреннее отражение (с математической точки зрения изменение знака $q(z)$ приводит к изменению типа уравнения (3)). В этом случае обычно требовалось, чтобы при больших z преломленное поле имело вид волны, бегущей в направлении возрастания z, что эквивалентно асимптотическому условию: $E(z, \omega)\sim\exp\{i\omega\sqrt{q(\infty)z}\}$ при $z\to\infty$ [1, 5]. Отметим, что задачей этого типа является задача об отражении от конечного слоя $0<z<h$, помещенного в однородное пространство $n(z)|_{z<0}=n(z)|_{z>h}=1$.

Пусть $n(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} n(\infty)<(\sin\theta_0/c_0)$ $(q(z)\to q(\infty)<0)$. Неоднородности сосредоточены на конечном расстоянии и от ∞ происходит полное внутреннее отражение. В этом случае ставилось условие убывания (или ограниченности) преломленного поля при больших z, что приводило к асимптотике: $E(z, \omega)\sim\exp\{-|\omega|\sqrt{|q(\infty)|}z\}$ при $z\to\infty$ [1, 5].

Пусть $n(z)|_{z>0}>(\sin\theta_0/c_0)$ $(q(z)|_{z>0}>0)$ без ограничений на поведение $n(z)$ при больших z. В этой ситуации уравнение (3) гиперболическое и для нестационарной задачи (3), (4) физически естественным является требование существования переднего фронта у преломленного и отраженного полей: $u(z, \xi)|_{z>0}\equiv 0$ при $\xi<\int\limits_0^z\sqrt{q(\zeta)}\,d\zeta$ и $r(\xi)\equiv 0$ при $\xi<0$. В стационарной постановке оно приводит к выделению решения, имеющего вид $E(z,\omega)=f(z,\omega)\exp\left\{i\omega\int\limits_0^z\sqrt{q(\zeta)}\,d\zeta\right\}$, где $f(z, \omega)$ аналитична в верхней полуплоскости переменной ω и ограничена в ней при каждом $z\geqslant 0$: $|f(z, \omega)|\leqslant C$ при $\operatorname{Im}\omega\geqslant 0$ [3]. Наконец, возможны случаи $n(z)$ специального вида, в том числе с линейным законом для $n^2(z)$ и др. [1, § 21, 22], при которых решения уравнения (1) выражаются через спецфункции. Решение $E(z, \omega)$ строится в виде комбинации спецфункций, удовлетворяющей либо условию ограниченности, либо принципу предельного поглощения в такой форме: требуется, чтобы при комплексных $\omega=\tau+i\sigma$ $(\sigma>0)$ оно убывало: $E(z, \tau+i\sigma)\to 0$ при $z\to\infty$. Аналогичные условия ставятся для периодических $n(z)$ [1, 2].

Возникает вопрос: нельзя ли найти постановку задачи (1), (2), единую для всех $n(z)$, встречающихся в физических задачах, нечувствительную к особенностям поведения $n(z)$, таким, как поведение на ∞, изменение знака или обращение в 0 разности $n^2(z)-\sin^2\theta_0$? Такую возможность представляет один результат спектральной теории дифференциальных уравнений. Сформулируем его в виде теоремы: пусть $q(z)|_{z>0}$ – вещественная локально интегрируемая функция, т. е. для любого конечного $h>0$ интеграл $\int\limits_0^h|q(z)|\,dz<\infty$. Тогда уравнение $y_{zz}''+\lambda q(z)y=0$ на полуоси $z>0$ при каждом комплексном $\lambda=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ имеет решение $y(z, \lambda)$ с квадратично интегрируемой производной: $\int\limits_0^\infty|y_z'(z,\lambda)|^2\,dz<\infty$, причем это решение единственно с точностью до множителя, не зависящего от z. Решение с таким свойством впервые упомянуто в работе [6], а в [7] установлена его единственность. Этот результат и позволяет сформулировать единую постановку, придав ей форму принципа предельного поглощения. Одним лишь требованием, налагаемым ею на $n^2(z)$, является локальная интегрируемость, что, очевидно, выполняется для всех $n(z)$, имеющих физический смысл.

Постановка такова: требуется найти решение $u(z, \omega)$ уравнения (1), имеющее при $z<0$ вид (2) и удовлетворяющее условию: при каждом комплексном $\omega=\tau+i\sigma$ $(\tau\neq 0,\ \sigma>0)$ интеграл $\int\limits_0^\infty|u_z'(z,\omega)|^2\,dz$ конечен.

Решение $u(z, \omega)$ может быть построено по вспомогательному решению $E(z, \omega)=\operatorname{cons} y(z, \omega^2)$ согласно формулам (5), (6). Уточним, что при вещественных $\omega\neq 0$ под решением и коэффициентом отражения мы понимаем верхние граничные значения $u(z, \omega+i0)$ и $r(\omega+i0)$, а непосредственный физический смысл имеют $u(z, \omega+i0)_{\omega>0}$ и $r(\omega+i0)|_{\omega>0}$. Условие $\int\limits_0^\infty|u_z'(z,\tau+i\sigma)|^2\,dz<\infty$ можно трактовать

как требование конечности энергии преломленного поля при наличии поглощения в полупространстве $z>0$. Приведенная постановка обладает следующими достоинствами: она охватывает все $n(z)$, встречающиеся в физических задачах; решение, выделяемое ею, всегда существует и является единственным в известных случаях она приводит к решениям, описанным выше в примерах; в ее основе лежит условие физического характера – принцип предельного поглощения.

Некоторые известные свойства решения остаются справедливыми в случае произвольного $n(z)$: коэффициент отражения $r(\omega)$ и преломленное поле $u(z, \omega)|_{z>0}$ аналитичны в верхней полуплоскости ω с разрезом по мнимой полуоси ($\operatorname{Im}\omega>0$, $\operatorname{Re}\omega\neq0$), причем $r(\omega^*)=\overline{r(\omega)}$, $u(z, \omega^*)=\overline{u(z, \omega)}$, где $\omega^*=-\overline{\omega}$. Если $n(z)\geqslant\sin\theta_0/c_6$ при всех $z>0$, то $r(\omega)$, $u(z, \omega)|_{z>0}$ аналитичны во всей верхней полуплоскости, включая мнимую полуось; если же имеются слои с $n(z)<\sin\theta_0$, то на мнимой полуоси происходит нарушение аналитичности. В последнем случае это приводит к появлению «предвестников» у отраженного и преломленного полей в нестационарной задаче: $r(\xi)$, $u(z, \xi)|_{z>0}\not\equiv0$ при $\xi<0$; для коэффициента отражения справедлива оценка ограниченности: в секторе $0<\arg\omega\leqslant(\pi/2)-\varepsilon\,(0<\varepsilon\leqslant\pi/2)\,|r(\omega)|\leqslant\operatorname{ctg}(\varepsilon/2)$. Отсюда выводится аналитичность «предвестника» отраженного поля $r(\xi)|_{\xi<0}$ при $\operatorname{Re}\xi<0$ [5]; для верхних граничных значений коэффициента отражения выполнено $|r(\omega+i0)|\leqslant1$ (ω вещественно и отлично от 0).

Решение, выделяемое единой постановкой, может быть построено с помощью предельного перехода, имеющего наглядный физический смысл. Пусть $n(z)$ – данный профиль, $u(z, \omega)$, $r(\omega)$ – соответствующее решение задачи (1), (2). Пусть, далее, $n_h(z)$ – «срезка» $n(z)$ на промежуток $0<z<h$: $n_h(z)|_{z<0}=n_h(z)|_{z>h}=1$, $n_h(z)|_{0<z<h}=n(z)$ (профиль $n_h(z)$ отвечает неоднородному слою в однородном пространстве), $u_h(z, \omega)$, $r_h(\omega)$ – решение задачи об отражении от этого слоя. Тогда при фиксированных z и $\omega=\tau+i\sigma$ ($\tau\neq0$, $\sigma>0$) $u_h(z, \omega)\xrightarrow[h\to\infty]{}u(z, \omega)$, $r_h(\omega)\xrightarrow[h\to\infty]{}r(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
3. *Алексеев А. С., Меграбов А. Г.* Прямая и обратная задачи рассеяния плоских волн на неоднородных переходных слоях (гиперболический случай).– В кн.: Матем. проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1972, вып. 3, с. 8–36.
4. *Меграбов А. Г.* Прямая и обратная задачи рассеяния плоских волн на неоднородных переходных слоях (эллиптический случай).– В кн.: Матем. проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1972, вып. 3, с. 113–123.
5. *Белишев М. И.* Обратная задача рассеяния плоских волн для одного класса слоистых сред.– Зап. науч. сем. ЛОМИ. Л.: Наука, 1978, т. 92, вып. IX, с. 30–53.
6. *Åke Plejel.* Complementary remarks about the limit point and limit circle theory.– Arkiv Matematik., 1970, v. 8, № 1, p. 45–47.
7. *Atkinson F. V., Everitt W. N., Ong K. S.* On m-coefficient of Weyl for a differential equation with an indefinite weight function.– Proc. of the London Mathematical Soc. Third series., 1974, v. 29, p. 2, p. 368–384.

Куйбышевский государственный университет

Поступила в редакцию 18.V.1982

УДК 534.232.73

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Касаткин Б. А., Павин Н. Я.

Задача построения пьезопреобразователя с управляемыми характеристиками наиболее просто решается путем использования пассивных электрических цепей, которые включаются между пьезопреобразователем и источником возбуждения. Однако для пьезоэлектрических излучателей это энергетически наименее выгодный способ, так как предельная излучаемая акустическая мощность резко уменьшается при уходе от резонансной частоты.

В связи с этим большой интерес представляет управление частотной характеристикой пьезоэлектрического излучателя, основанное на использовании активных (пьезокерамических) слоев [1]. Акустические характеристики активных слоев зависят от электрической нагрузки и, следовательно, могут быть управляемыми.

Для экспериментального исследования возможностей построения пьезопреобразователей с управляемыми характеристиками были использованы пьезопреобразователь с управляемой резонансной частотой [2] и широкополосный пьезопреобразова-