АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIX 1983 Вып. 1

УДК 534.204.1

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В СЛОИСТОМ ОКЕАНЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.

Исследуется поле точечного источника в слоисто-неоднородной среде с переменной плотностью. Методом инвариантного погружения решение краевой задачи для различных краевых условий на границах среды сводится к решению уравнения Риккати с последующим вычислением ряда квадратур. При этом не появляются производные плотности.

В работе [1] был развит метод (метод погружения), позволяющий свести краевую задачу для уравнения Гельмгольца к системе интегродифференциальных уравнений с начальными данными. Для слоистых сред эти уравнения имеют вид обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [2] указанный метод был обобщен на случай краевых условий на границах слоя, характерных для акустики океана (в предположении постоянства плотности среды). Ниже получено обобщение на случай среды с переменной плотностью.

Прежде всего рассмотрим задачу о падении плоской волны на слой. Пусть слоисто-неоднородная среда с волновым числом $(k^2(z)=k^2[1+\varepsilon(z)]$, где $\varepsilon(z)$ описывает неоднородности скорости звука, и плотностью $\rho(z)$ занимает часть пространства $L_0<z<L$, а вне ее — однородна с параметрами $\varepsilon=0$, $\rho=1$ (плотность нормирована на характерное значение плотности среды и, следовательно, является безразмерной величиной).

Внутри слоя поле давления описывается решением уравнения [3]

$$\Delta P-\frac{\rho'(z)}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}+k^2(z)P=0 \quad (\rho'(z)=d\rho(z)/dz). \tag{1}$$

Пусть из области $z>L$ падает плоская волна $\exp\{-ip(z-L)+i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}\}$ $(p^2=k^2-q^2$, $\boldsymbol{\rho}=\{x, y\})$. Тогда решение задачи (1) можно представить в виде $P(\mathbf{r})=U_{\mathbf{q}}(z)\exp\{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}\}$, где функция $U_{\mathbf{q}}(z)$ удовлетворяет уравнению (индекс $\mathbf{q}$ в дальнейшем опускается)

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}-\frac{\rho'(z)}{\rho(z)}\frac{dU}{dz}+p^2[1+\tilde{\varepsilon}(z)]U=0 \quad (\tilde{\varepsilon}(z)=k^2p^{-2}\varepsilon(z)). \tag{2}$$

В областях $z>L$ и $z<L_0$ решение задачи описывается выражениями

$$\begin{gathered} U(z)=\exp\{-ip(z-L)\}+R_L\exp\{ip(z-L)\} \quad (z\geqslant L), \\ U(z)=T_L\exp\{-ip(z-L_0)\} \quad (z\leqslant L_0), \end{gathered} \tag{3}$$

где R_L и T_L — соответственно коэффициенты отражения и прохождения волны. Краевыми условиями для уравнения (2) являются условия непрерывности $U(z)$ и $\rho^{-1}dU/dz$ на границах слоя, которые можно записать в виде

$$U(L_0)-\frac{i}{p\rho(L_0)}U'(L_0)=0, \quad U(L)+\frac{i}{p\rho(L)}U'(L)=2. \tag{4}$$

Таким образом, поле внутри слоя описывается решением краевой задачи (2), (4). Зная это решение, можно определить коэффициенты отражения и прохождения волны с помощью равенств $R_L=U(L)-1$, $T_L=U(L_0)$.

От уравнения (2) можно с помощью замены $\tilde{U}=U/\sqrt{\rho(z)}$ перейти к уравнению Гельмгольца с эффективным волновым числом $\tilde{k}(z)$, содержа-

щим $\rho'(z)$ и $\rho''(z)$ (см., например, [3]). Однако появление производных плотности в волновом уравнении приводит к ряду неудобств, связанных с определенными свойствами гладкости. Тем более неудобно, когда функция $\rho(z)$ является экспериментально измеряемой величиной. Ниже будет показано, что эти трудности являются фиктивными, целиком обусловленными заменой величины U на $\tilde{U}$.

Краевой задаче (2), (4) эквивалентно интегральное уравнение

$$U(z,L)=g(z,L)+\int_{L_0}^{L} d\xi g(z,\xi)\varphi(\xi)U(\xi,L). \tag{5}$$

где $g(z,z_0)=\exp\left\{ip\,\mathrm{sign}(z-z_0)\int_{z_0}^{z} d\xi\rho(\xi)\right\}$, а функция $\varphi(\xi)$ определяется равенством

$$\varphi(\xi)=ip[1+\tilde{\varepsilon}(\xi)-\rho^2(\xi)]/2\rho(\xi). \tag{6}$$

Следуя идеям метода погружения, параметр L (положение правой границы слоя, на которую падает плоская волна) включаем в качестве аргумента функции $U(z, L)$. Отметим, что в уравнении (5) функции $\tilde{\varepsilon}(\xi)$ и $\rho(\xi)$ могут быть как непрерывными функциями, так и кусочно-непрерывными.

Дифференцируя (5) по L, получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial U(z,L)}{\partial L}=\{ip\rho(L)+\varphi(L)U_L\}U(z,L),\quad U(z,z)=U_z, \tag{7}$$

где $U_L=U(L,L)$ — поле на границе слоя — определяется уравнением

$$\frac{\partial U_L}{\partial L}=\frac{\partial U(z,L)}{\partial z}\bigg|_{z=L}+\frac{\partial U(z,L)}{\partial L}\bigg|_{z=L}. \tag{8}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (8) определяется краевым условием (4), а второе слагаемое — уравнением (7) при $z=L$. В результате получаем замкнутое уравнение для поля на границе слоя (уравнение Риккати)

$$\frac{\partial U_L}{\partial L}=i2p\rho(L)[U_L-1]+\varphi(L)U_L^2,\quad U_{L_0}=1. \tag{9}$$

Таким образом, краевая задача (2), (4) эквивалентным образом сводится к системе уравнений (7), (9), которая, однако, является задачей с начальными данными. Как видно из структуры этих уравнений, решение задачи определяется функциями $\varepsilon(z)$ и $\rho(z)$, но не их производными.

Если источник плоских волн находится внутри слоя среды, то волновое поле описывается уравнением

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}-\frac{\rho'(z)}{\rho(z)}\frac{d}{dz}+p^2[1+\tilde{\varepsilon}(z)]\right\}G(z,z_0)=2ip\rho(z_0)\delta(z-z_0). \tag{10}$$

Вне слоя среды решение имеет вид уходящих волн:

$$G(z,z_0)=\begin{cases} T_1\exp\{ip(z-L)\} & (z\geqslant L)\\ T_2\exp\{-ip(z-L_0)\} & (z\leqslant L_0),\end{cases}$$

откуда вытекают краевые условия для уравнения (10):

$$G'(L,z_0)=ip\rho(L)G(L,z_0),\quad G'(L_0,z_0)=-ip\rho(L_0)G(L_0,z_0). \tag{11}$$

Краевой задаче (10), (11) эквивалентно интегральное уравнение

$$G(z,z_0;L)=g(z,z_0)+\int_{L_0}^{L} d\xi g(z,\xi)\varphi(\xi)G(\xi,z_0;L). \tag{12}$$

Рассматривая теперь $G(z, z_0; L)$ как функцию параметра L, получаем для нее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial G(z, z_0; L)}{\partial L} = \varphi(L) U(z, L) U(z_0, L), \tag{13}$$

где $U(z, L)$ — решение уравнения (7). Начальным условием для (13) является условие

$$G(z, z_0; L)|_{L=\max(z, z_0)} = \begin{cases} U(z, z_0) & (z_0 \geqslant z) \\ U(z_0, z) & (z_0 \leqslant z). \end{cases}$$

Таким образом, при наличии источника волн в слое среды к уравнениям (7), (9) добавляется еще одно уравнение — (13). Отметим, что уравнение (13) интегрируется, т. е. решение задачи об источнике внутри слоя среды простым образом (через квадратуру) связано с решением задачи о падении волны на слой среды.

Выше рассмотрена простейшая задача о распространении волны в слое среды, вне которого среда однородна с параметрами $\varepsilon=0$, $\rho=1$. Рассмотрим теперь типичную задачу о распространении акустической волны в слоистом океане.

Пусть слоисто-неоднородная среда с параметрами $k^2(z)=k^2[1+\varepsilon(z)]$, $\rho(z)$ занимает часть пространства $h<z<H$, а вне его одородна с параметрами k_2, ρ_2 при $z<h$ и k_1, ρ_1 при $z>H$. Пусть внутри слоя в точке с координатами (z_0, ρ) находится точечный источник. Тогда решение задачи о распространении волны сводится для фурье-образа поля давления к одномерному уравнению (10) с краевыми условиями непрерывности G, $\rho^{-1}dG/dz$ на границах слоя, которые можно записать в виде ($p_i^2=k_i^2-q^2$, $\varkappa_2=p_2p_2^{-1}\times$ $\times\rho(h)$, $\varkappa_1=p_1\rho_1^{-1}\rho(H)$):

$$G_z'(h, z_0) = -i\varkappa_2 G(h, z_0), \quad G_z'(H, z_0) = i\varkappa_1 G(H, z_0). \tag{14}$$

Пространственное распределение поля давления описывается преобразованием Ганкеля [3]:

$$P=(z, \rho) = \frac{1}{4i\pi\rho(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{q}{(k^2-q^2)^{1/2}} G_q(z, z_0) H_0^{(1)}(q|\rho-\rho_0|). \tag{15}$$

Так как краевые условия (14) отличаются от (11), невозможно непосредственно использовать уравнения по параметру H, полученные выше. Эти уравнения можно будет использовать только в том случае, если удастся соответствующим образом переформулировать краевые условия. Будем действовать дальше путем, аналогичным работе [2].

Рассмотрим вспомогательное уравнение, определенное во всем пространстве $-\infty<z<\infty$ с условием излучения на $z\to\pm\infty$:

$$D(z)\frac{d}{dz}D^{-1}(z)\frac{d}{dz}\tilde{G}(z, z_0) + \tilde{k}^2(z)\tilde{G}(z, z_0) = 2ip\rho(z_0)\delta(z-z_0), \tag{16}$$

где

$$\tilde{k}^2(z) = \begin{cases} \varkappa_2^2 & (z<h) \\ k^2[1+\tilde{\varepsilon}(z)] & (h<z<H), \\ \varkappa_1^2 & (z>H) \end{cases} \quad D(z) = \begin{cases} \rho(h) & (z<h) \\ \rho(z) & (h<z<H). \\ \rho(H) & (z>H) \end{cases}$$

Тогда очевидно, что в слое среды, т. е. при $h\leqslant z$, $z_0\leqslant H$ $\tilde{G}\equiv G$. Краевой задаче (16) эквивалентно интегральное уравнение

$$\tilde{G}(z, z_0) = \tilde{g}(z, z_0) + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{g}(z, \xi)\tilde{\varphi}(\xi)\tilde{G}(\xi, z_0), \tag{17}$$

где

$$\tilde{g}(z, z_0) = \exp\left\{ip\,\mathrm{sign}(z-z_0)\int_{z_0}^{z} d\xi D(\xi)\right\},$$

$$\tilde{\varphi}(\xi)=\frac{i}{2pD(\xi)}[\tilde{k}^2(\xi)-p^2D^2(\xi)].$$

Введем теперь параметры погружения (L_0, L):

$$\tilde{G}(z, z_0; L)=\tilde{g}(z, z_0)+\int_{L_0}^{L} d\xi\tilde{g}(z, \xi)\tilde{\varphi}(\xi)\tilde{G}(\xi, z_0; L). \qquad (17')$$

Решение задачи (17) соответствует в (17′) предельному переходу $L_0\to-\infty$, $L\to\infty$. Теперь очевидно, что функция $\tilde{G}(z, z_0; L)$ как функция параметра L удовлетворяет системе уравнений погружения типа (7), (9), (13), т. е. системе уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами $(z\geqslant z_0)$:

$$\frac{\partial\tilde{G}(z, z_0; L)}{\partial L}=\tilde{\varphi}(L)U(z, L)U(z_0, L),\ \tilde{G}(z, z_0; z)=U(z_0, z);$$

$$\frac{\partial U(z, L)}{\partial L}=\{ipD(L)+\tilde{\varphi}(L)U_L\}U(z, L),\ U(z, z)=U_z; \qquad (18)$$

$$\frac{dU_L}{dL}=2ipD(L)[U_L-1]+\tilde{\varphi}(L)U_L^2,\ U_{L_0}=1.$$

Система уравнений (18) с точностью до коэффициентов совпадает с системой уравнений, рассмотренной в [2]. Поэтому можно воспользоваться непосредственно результатами работы [2]. Переходя к пределу $L_0\to-\infty$, $L\to\infty$ и учитывая, что при $h\leqslant z$, $z_0\leqslant H$ $G(z, z_0)\equiv\tilde{G}(z, z_0; \infty)$, получаем, что поле точечного источника складывается из двух частей: $G(z, z_0)=$ $=G_1(z, z_0; H)+G_2(z, z_0; H)$, где $G_1(z, z_0; H)$ как функция параметра H (при $h=0$, H — глубина океана) удовлетворяет системе уравнений погружения:

$$\frac{\partial G_1(z, z_0; H)}{\partial H}=\varphi(H)U(z, H)U(z_0, H),$$

$$G_1(z, z_0; H|_{H=\max(z, z_0)}=\begin{bmatrix} U(z, z_0)\ z_0\geqslant z \\ U(z_0, z)\ z_0\leqslant z \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial U(z, H)}{\partial H}=\{ip\rho(H)+\varphi(H)U_H\}U(z, H),\ U(z, z)=U_z; \qquad (19)$$

$$\frac{dU_H}{dH}=2ip\rho(H)[U_H-1]+\varphi(H)U_H^2,\ U_h=2p\rho_2/(p_2+p\rho_2).$$

Функция $G_2(z, z_0; H)$ определяется равенством

$$G_2(z, z_0; H)=\frac{1}{G-U_H}U(z, H)U(z_0, H),\ G=2p\rho_1/(p\rho_1-p_1). \qquad (20)$$

Функция $\varphi(H)$, фигурирующая в (19), определяется формулой (6). Отметим, что влияние границ при $z=h$ и $z=H$ проявляется различным образом. Влияние границы при $z=h$ существенно для начального условия к уравнению для функции U_H, граница при $z=H$ непосредственно сказывается на функции $G_2(z, z_0; H)$. При $H\to\infty G_2\to 0$. Предельные переходы по ρ_1 и ρ_2 позволяют рассматривать конкретные краевые условия, характерные для акустики океана. Так, при $\rho_2\to 0U_h=0$ (граница вода — воздух), а при $\rho_1\to\infty$ $G=2$ (граница вода — дно) и $dG(z, z_0)/dz|_{z=H}=0$.

Рассмотренная задача симметрична относительно границ. Следовательно, можно переписать все результаты в виде, где роль границ переставлена местами. И переход к полупространству можно осуществлять либо как $H\to\infty$, либо как $h\to-\infty$. Первый случай удобен для детерминированных задач, а второй — для статистических, так как тогда решение уравнения для U_H должно иметь стационарное распределение вероятностей и можно воспользоваться гипотезой эргодичности.

Выше рассмотрена задача о распространении акустической волны в слоистом океане с переменной плотностью. Отметим, что этой задаче совершенно аналогична задача о распространении электромагнитных волн в слоистых средах, описываемых уравнениями Максвелла. В самом деле, для линейной задачи достаточно рассмотреть лишь две поляризации падающего поля (см., например, [4]), когда электрическое поле **E** волны перпендикулярно к плоскости падения или параллельно ей. Первый случай эквивалентен значению $\rho(z)=1$, а второй — значению $\rho(z)=1+\varepsilon(z)$. Поэтому полученные выше уравнения в равной мере описывают и процесс распространения электромагнитных волн в слоисто-неоднородных средах, например волноводное распространение волны над морем. Отметим в этой связи, что уравнения (7) и (9) для электромагнитных волн аналогичным методом были получены в работе [5], а уравнение (9) для коэффициента отражения было получено еще раньше другим методом в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.* Теория инвариантного погружения и волны в статистически неоднородных средах.– Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 2, с. 1112–1115.
2. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.* К теории распространения звука в океане.– Акуст. ж., 1982, т. 28, № 3, с. 310–315.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973, с. 344.
4. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1973, с. 648.
5. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И.* Теория распространения волн в нелинейных неоднородных средах.– ЖЭТФ, 1980, т. 79, № 3(9), с. 817–827.
6. *Бреховских В. Л., Татарский В. И.* О тепловом излучении случайно-неоднородных слоистых сред.– Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана, 1977, т. 13, № 2, с. 144–152.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВНЦ Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29.XII.1981