УДК 621.8.031.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ КОССЕРА

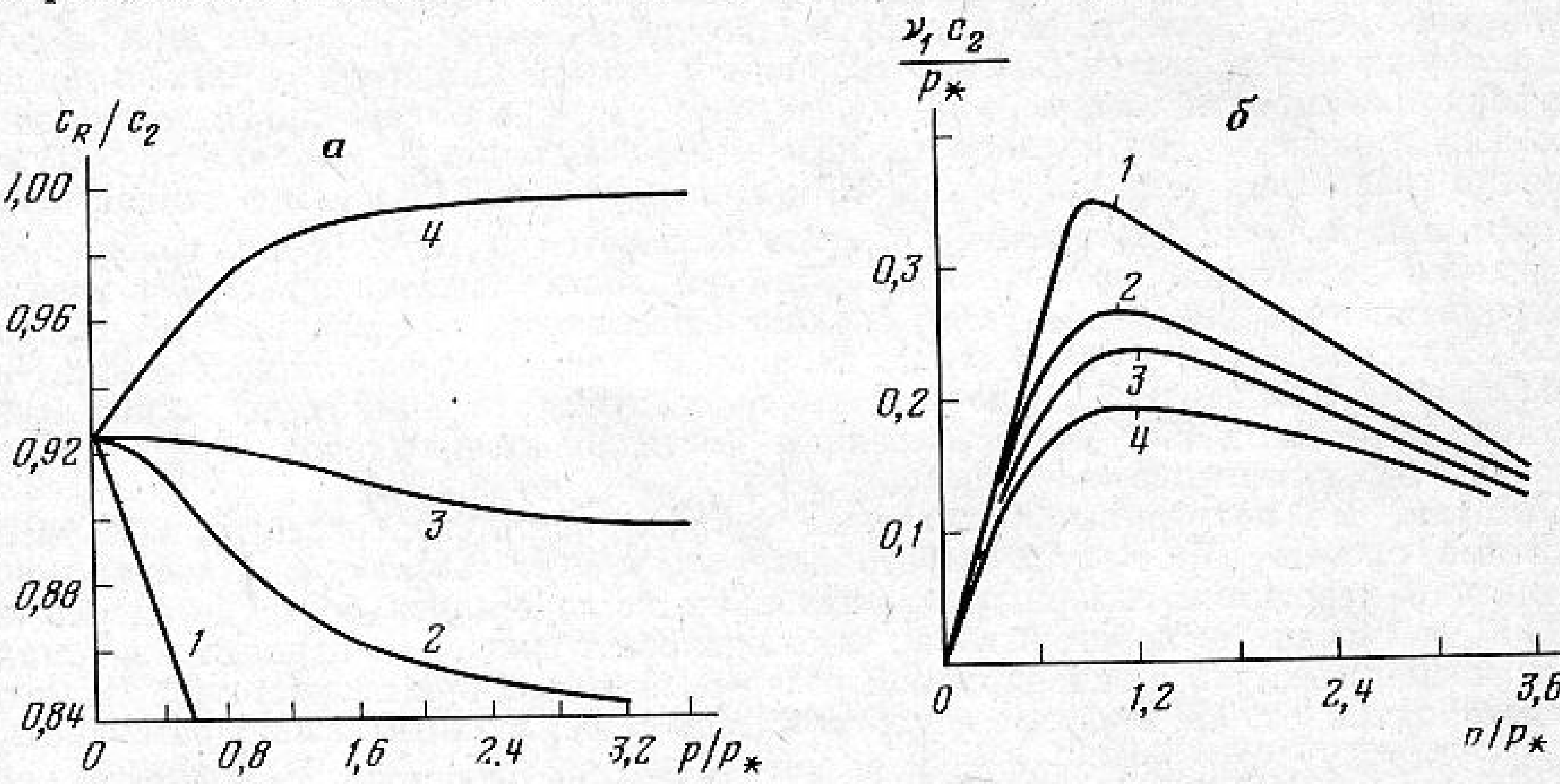
Лялин А. Е., Пирожков В. А., Степанов Р. Д.

Макроскопические механические свойства сред зернистого строения могут быть описаны в рамках модели Коссера [1–3]. В работе [4] рассмотрена задача о распространении поверхностных волн в полупространстве Коссера со стесненным вращением. Выявлен ряд особенностей, которыми обладают такие волны по сравнению с аналогичными в классическом упругом полупространстве. Исследовался также процесс распространения поверхностных волн Рэлея в полупространстве Коссера с кинематически независимым вектором микровращения [1]. В последней работе, однако, была допущена ошибка, которая привела к неправильным заключениям о характеристике распространения поверхностных волн. Настоящая заметка посвящена исправлению неточностей, встречающихся в работе [1].

Рассмотрим полупространство Коссера, поверхность которого свободна от нагрузок. Оси декартовых координат x_2 и x_3 направим по поверхности, а ось x_1 – в глубь полупространства. Уравнения движения в перемещениях $\mathbf{u}$ и углах микровращения $\boldsymbol{\omega}$ имеют вид [2, 5]

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}+2\alpha\ \mathrm{rot}\,\omega=\rho\ddot{\mathbf{u}},\\
&(\beta+2\gamma)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega}-(\gamma+\varepsilon)\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}+2\alpha\ \mathrm{rot}\,\mathbf{u}-4\alpha\boldsymbol{\omega}=j\ddot{\boldsymbol{\omega}},
\end{aligned}
$$

где λ; μ; α; β; γ; ε – упругие постоянные модели, ρ – плотность среды, j – мера инерции среды при вращении. Граничные условия на свободной поверхности полупространства запишутся в виде: $\sigma_{11}=0$; $\sigma_{12}=0$; $\mu_{13}=0$; $\sigma_{13}=0$; $\mu_{11}=0$; $\mu_{12}=0$. Здесь



Фиг. 1. Зависимость фазовой скорости распространения поверхностных волн и минимального по абсолютной величине коэффициента затухания амплитуды колебаний от круговой частоты при $c_3^2/c_2^2=2{,}0$; $c_2^2/c_1^2=0{,}3$: *1* – $c_4^2/c_2^2=0{,}5$; *2* – $c_4^2/c_2^2=0{,}7$; *3* – $c_4^2/c_2^2=0{,}8$; *4* – $c_4^2/c_2^2=1{,}0$

σ_{ij} – компоненты несимметричного тензора силовых напряжений, μ_{ij} – компоненты тензора моментных напряжений.

Исследуем поверхностные волны, распространяющиеся в направлении оси x_2 в условиях плоской деформации. Векторы $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ имеют компоненты $\mathbf{u}=u_1\mathbf{э}_1+u_2\mathbf{э}_2$; $\boldsymbol{\omega}=\omega_3\mathbf{э}_3$, где $\mathbf{э}_1$; $\mathbf{э}_2$; $\mathbf{э}_3$ – единичные векторы, направленные по осям координат. Разложим вектор смещений на потенциальную и соленоидальную составляющие: $\mathbf{u}=\mathrm{grad}\,\varphi+\mathrm{rot}\,\psi$; $\psi=\psi_3\mathbf{э}_3$. В случае монохроматической волны зададим потенциалы в виде

$$
(2)\qquad \{\varphi;\ \psi_3;\ \omega_3\}=\{\Phi(x_1);\ \Psi(x_1);\ \Omega(x_1)\}\ \exp i(\kappa x_2-pt).
$$

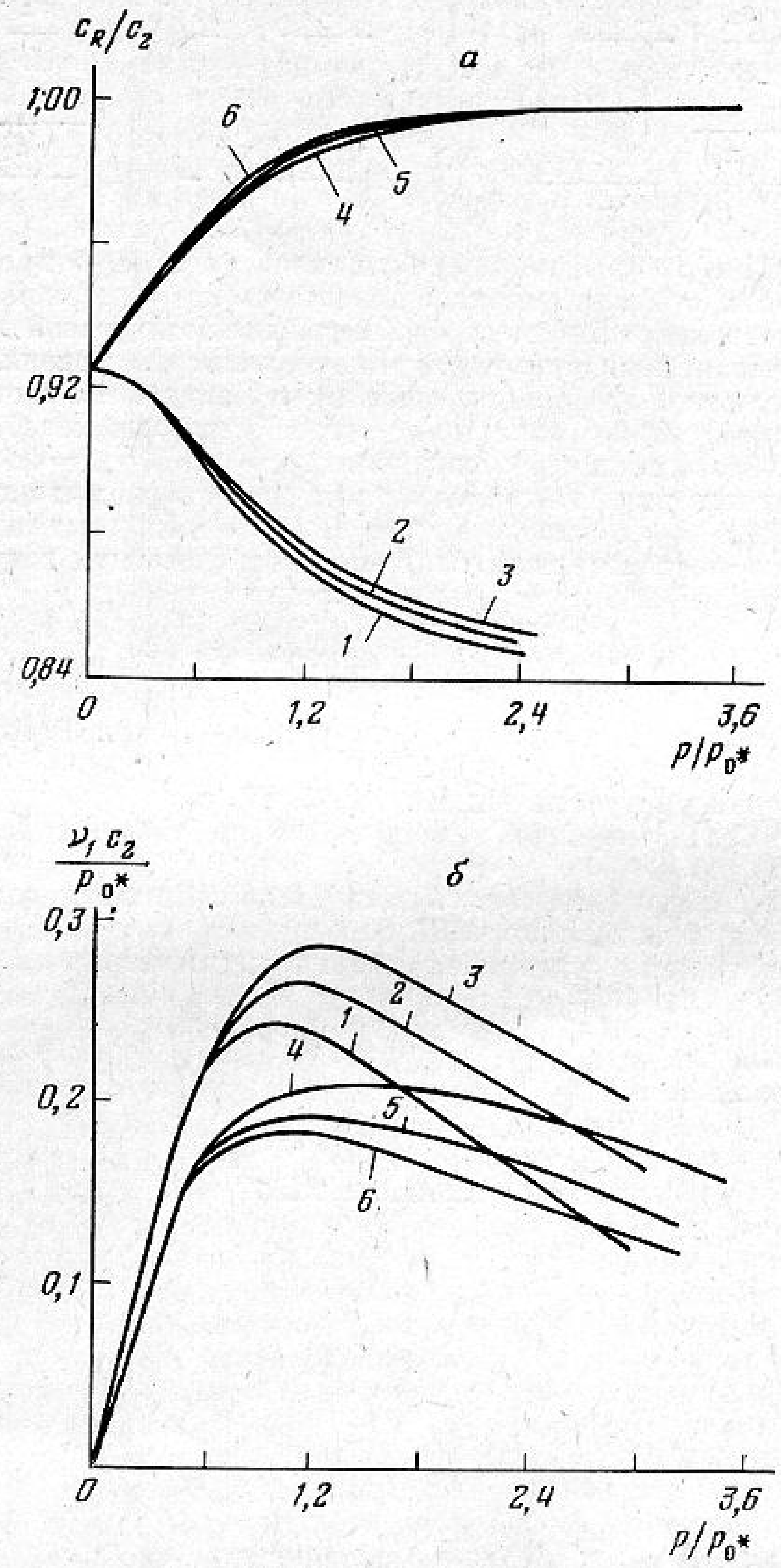
Подставляя (2) в уравнение (1), получим $(d_1=d/dx_1)$,

$$
(3)\qquad d_1^2\Phi-\kappa^2\Phi=-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\,\Phi,
$$

$$
(4)\qquad (\mu+\alpha)(d_1^2\Psi-\kappa^2\Psi)+2\alpha\Omega=-\rho p^2\Psi,
$$

$$
(5)\qquad (\gamma+\varepsilon)(d_1^2\Omega-\kappa^2\Omega)-2\alpha(d_1^2\Psi-\kappa^2\Psi)-4\alpha\Omega=jp^2\Omega.
$$

Монотонно убывающее решение уравнения (3) – $\Phi=A\exp(-\nu x_1)$, где $\nu=(\kappa^2-p^2/c_1^2)^{1/2}$; $c_1^2=\rho^{-1}(\lambda+2\mu)$, полностью совпадает с аналогичным выражением для классического полупространства. Уравнения (4), (5) допускают решения вида $\Psi(x_1)=$ $=B_i\exp(-\nu_i x_1)$; $\Omega(x_1)=D_i\exp(-\nu_i x_1)$, где $D_i=\dfrac{1}{2\alpha}B_i\{(\kappa^2-\nu_i^2)(\mu+\alpha)-\rho p^2\}$. Последние соотношения показывают, что составляющая колебательного процесса, отвечающая потенциалу Ψ, существует одновременно с составляющей, характеризуемой вектором микровращений. Раздельное существование названных компонент волнового процесса возможно лишь при $\alpha=0$. Уравнения (3) и (4) описывают в этом случае волну Рэлея в классическом упругом полупространстве [2]. В работе [1]



Фиг. 2. Зависимость фазовой скорости распространения поверхностных волн и минимального по абсолютной величине коэффициента затухания амплитуды колебаний от круговой частоты при $c_2^2/c_1^2=0{,}3$: *1* – $c_4^2/c_2^2=0{,}7$; $\alpha/\mu=0{,}707$; *2* – $c_4^2/c_2^2=0{,}7$; $\alpha/\mu=1{,}0$; *3* – $c_4^2/c_2^2=0{,}7$; $\alpha/\mu=2{,}0$; *4* – $c_4^2/c_2^2=1{,}0$; $\alpha/\mu=0{,}707$; *5* – $c_4^2/c_2^2=1{,}0$; $\alpha/\mu=1{,}0$; *6* – $c_4^2/c_2^2=1{,}0$; $\alpha/\mu=2{,}0$

не учтено это обстоятельство, что привело к ошибочному выводу о возможности раздельного существования двух поверхностных волн в полупространстве Коссера, одна из которых обладает дисперсией, а другая – нет. Значения $\nu_i=\sqrt{\kappa^2-a_i}$ вполне определяются решением a_i алгебраического уравнения $(i=1,\ 2)$ $Xa^2-Ya-Z=0$, где

$$X=\frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{2\alpha};\quad Y=\frac{p^2}{2\alpha}\{\rho(\gamma+\varepsilon)+j(\mu+\alpha)\}-2\mu;\quad Z=2\rho p^2\left(1-\frac{jp^2}{4\alpha}\right).$$

Связь между напряжениями и компонентами векторов смещений и углов микровращений имеет вид [2, 5]

$$\sigma_{ij}=(\mu+\alpha)(u_{i,j}-\in_{kji}\omega_k)+(\mu-\alpha)(u_{j,i}-\in_{kij}\omega_k)+\lambda u_{k,k}\delta_{ij},\tag{6}$$

$$\mu_{ij}=(\gamma+\varepsilon)\omega_{i,j}+(\gamma-\varepsilon)\omega_{j,i}+\beta\omega_{k,k}\delta_{ij},$$

где $\in_{\kappa ij}$ – символ Леви-Чивита, δ_{ij} – символ Кронекера, запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей координате. Подставляя в соотношение (6) выражения для потенциалов и учитывая граничные условия на свободной поверхности полупространства, получим уравнение относительно фазовой скорости поверхностных волн Рэлея c_R:

$$\sqrt{1-\frac{a_1}{\kappa^2}}\left(\frac{a_1 c_3^2}{\kappa^2}-c_R^2\right)\left[\left(2-\frac{c_R^2}{c_2^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{a_2}{\kappa^2}}\sqrt{1-\frac{c_R^2}{c_1^2}}\right]-$$

$$-\sqrt{1-\frac{a_2}{\kappa^2}}\left(\frac{a_2 c_3^2}{\kappa^2}-c_R^2\right)\left[\left(2-\frac{c_R^2}{c_2^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{a_1}{\kappa^2}}\sqrt{1-\frac{c_R^2}{c_1^2}}\right]=0,$$

где $c_2^2=\mu/\rho$; $c_3^2=\mu+\alpha/\rho$. На фиг. 1, *а*, *б* и на фиг. 2, *а*, *б* представлены данные расчетов. На фиг. 1, *а* и 2, *а* показана зависимость безразмерной фазовой скорости распространения поверхностных волн от безразмерной круговой частоты колебаний для различных сочетаний значений упругих параметров модели. Зависимость минимального по абсолютной величине коэффициента затухания амплитуды колебаний (здесь им является ν_1) от безразмерной круговой частоты колебаний представлена на фиг. 1, *б* и 2, *б*. Здесь введены обозначения $p_*^2=4\alpha/j$, $p_{*0}^2=4\mu/j$; $c_4^2=\gamma+\varepsilon/j$.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы: поверхностные волны Рэлея в полупространстве Коссера обладают дисперсией, зависимость минимального по абсолютной величине коэффициента затухания амплитуды колебаний от частоты имеет экстремальный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эринген А. К.* Теория микрополярной упругости.– В кн.: Разрушение. Т. 2 / Под ред. Либовиц Г. М.: Мир, 1975, с. 646–751.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 140 с.
4. *Adomeit G.* Ausbreitung elastischer Wellen und Bestimmung von Materialkonstaten im Cosserat.– Kontinum. Aachen, 1967. 80 c.
5. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости.– ПММ, 1964, т. 28, № 3, с. 401–408.

Поступила в редакцию 6.II.1981

Всесоюзный заочный
инженерно-строительный
институт