АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 5

УДК 534.2

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ ЗВУКА ВИХРЕМ

Фабрикант А. Л.

Найдены сечения рассеяния и поглощения звуковой волны на цилиндрическом вихре с учетом рефракции звука в движущейся среде вдали от вихревого ядра.

В работе [1] найдено, что взаимодействие звуковой волны с синхронными частицами вращающегося потока (цилиндрического вихря) приводит к усилению звука. Однако доказательство этого утверждения проведено не вполне корректно, поскольку при исследовании рассеяния звука необходимо учитывать не только колебания вихревого ядра, но и рефракцию звуковых волн в движущейся среде вдали от ядра вихря. Ниже мы найдем сечения рассеяния и поглощения звука на вихре с учетом обоих этих эффектов и покажем, что вывод о возможности резонансного усиления вихрем низкочастотного звука сохраняет силу и при учете рефракции. При этом оказывается, что учет рефракции не влияет на сечение поглощения, но существенно изменяет вид сечения рассеяния.

Вычислим величину $L(r)=\mathrm{Re}\,(r^2u^*v)$, где $\mathbf{V}=(u, v)$ — амплитуда $\exp\,(i\omega t-in\varphi)$ колебаний скорости (движение без потери общности можно считать двумерным [1, 2]; r, φ — полярные координаты). При $r\gg a$ (a — размер вихревого ядра) течение потенциально: $\mathbf{V}=\nabla\Phi$ и для потенциала Φ имеем уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\Phi+\frac{[\omega-n\Omega(r)]^2}{c^2}\Phi=0. \tag{1}$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения частиц жидкости в стационарном вихревом течении, c — скорость звука ($c=\mathrm{const}$ [1]). Умножив уравнение (1) на $inr\Phi^*$ и интегрируя по частям от $r=r_1$ до $r=r_0$, нетрудно показать, что $L(r_0)=L(r_1)$, где $r_0\gg\lambda\equiv 2\pi c/\omega$, $a\ll r_1\ll\lambda$. При $\mu=\omega a/c\ll 1$, $\Omega\leqslant\omega$ приближенное решение уравнения (1) выражается через функции Ганкеля $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$:

$$\Phi=A[H_n^{(1)}(\omega r/c)+R_nH_n^{(2)}(\omega r/c)];\quad A=\mathrm{const}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$L(r_0)=\frac{2|n|}{\pi}|A|^2(|R_n|^2-1). \tag{3}$$

В то же время при $r\ll\lambda$ движущуюся среду можно считать несжимаемой и для функции тока ψ ($u=d\psi/dr$, $v=in\psi$) мы имеем [1] уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\psi-\frac{d^2\Omega/dr^2+3r^{-1}d\Omega/dr}{\Omega-\omega/n}\psi=0. \tag{4}$$

Умножая это уравнение на $inr\psi^*$ и интегрируя по частям с учетом правила обхода резонансных особых точек $r_n(\Omega(r_n)=\omega/n)$ [1], получим $L(r_1)=-\pi n[|\psi|^2|d\Omega/dr|^{-1}dQ/dr]_{r=r_n}$, где $Q=rd\Omega/dr+2\Omega$ — завихренность стационарного течения. Сравнивая это выражение с формулой (3), получим $(1-|R_n|^2)\infty(dQ/dr)_{r=r_n}$. Таким образом, если завихренность убывает, то звуковая волна усиливается при отражении ($|R_n|>1$).

При $r\gg a$ решение уравнения (4) имеет вид

$$\psi=B[(r/a)^n+q_n(r/a)^{-n}];\quad B=\mathrm{const}, \tag{5}$$

где величины q_n определяются профилем относительной угловой скорости $\Omega(r)/\omega$ [1]. Сравнивая выражения (5) и (2) в области $a \ll r \ll \lambda$, можно показать, что $|1-R_n| \lesssim \mu^2$ и $|B| = 2(|n|!)^{-1}(\omega a/2c)^{|n|}|A|$. В то же время из формулы (5) следует: $L(r_1) = -2n^2|B|^2 \operatorname{Im} q_n$, откуда с учетом формулы (3) получаем

$$1-|R_n|^2 = \frac{4\pi}{|n|!(|n|-1)!}\left(\frac{\omega a}{2c}\right)^{2|n|} \operatorname{Im} q_n. \tag{6}$$

Сечение поглощения плоской волны определяется гармоникой $n=2$ [1]:

$$\sigma_r = \frac{c}{\omega}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(1-|R_n|^2) \approx \frac{c}{\omega}(1-|R_2|^2) = \frac{\pi a}{8}\left(\frac{\omega a}{c}\right)^3 \operatorname{Im} q_2. \tag{7}$$

Это выражение совпадает с полученным в работе [1].

С помощью метода сращиваемых асимптотических разложений можно найти сечение рассеяния σ_e. Для этого введем внешнюю переменную $\sigma = \omega r/c$ и внутреннюю $\xi = r/a$. Из уравнения (1) получаем внешнее разложение с точностью μ^2

$$\Phi_2^e = A[H_\alpha^{(1)}(\sigma) + \tilde{R}_n H_\alpha^{(2)}(\sigma)] \xrightarrow[\sigma \gg |n|]{} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma}}\Big[\exp\Big[i\left(\sigma - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \tag{8}$$
$$- \frac{i\pi}{2}\mu^2\frac{n\Omega_0}{|n|\omega}\Big] + \tilde{R}_n \exp\Big[-i\left(\sigma - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{i\pi}{2}\mu^2\frac{n\Omega_0}{|n|\omega}\Big]\Big],$$

где $\alpha^2 = n^2 + \dfrac{2n\Omega_0}{\omega}\mu^2$, $\Omega(r \gg a) \approx \Omega_0 a^2/r^2$. Отсюда получаем, что коэффициент отражения цилиндрической звуковой волны $R_n = \tilde{R}_n \exp(i\pi\mu^2 n\Omega_0/|n|\omega)$.

Внутреннее разложение с точностью μ^0 имеет вид (5). Сращивая выражения (5) и (8), получим с точностью μ^2, что $\tilde{R}_n = 1$ при $|n| \geqslant 2$ и $\tilde{R}_n = 1 + i\pi q_n \mu^2/2$ при $n = \pm 1$. Воспользовавшись теперь результатами работы [1], где показано, что с точностью μ^2 имеем: $R_0 = 1$, $q_{\pm 1} = \mp\Omega_0/\omega$ нетрудно получить

$$d\sigma_e = \frac{c}{2\pi\omega}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(R_n - 1)e^{-in\varphi}\right|^2 = \tag{9}$$
$$= \frac{\pi a}{2}\left(\frac{\Omega_0 a}{c}\right)^3 \frac{\omega}{\Omega_0}\cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Это выражение было получено в работах [2, 3] другим способом — с помощью метода возмущений по параметру $\nu = (\omega a/c)^2 \Omega_0/\omega$. Заметим, что, хотя при $\Omega_0 \sim \omega$ сечение поглощения (7) имеет тот же порядок $\mu^3 a$, что и сечение рассеяния (9), для вычисления его недостаточно борновского приближения, использованного в работах [2, 3], а требуется вычислить следующее приближение теории возмущений. Используемое в настоящей работе разложение по цилиндрическим гармоникам позволяет найти σ_e и σ_r более просто.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Големшток Г. М., Фабрикант А. Л.* Рассеяние и усиление звуковых волн цилиндрическим вихрем.– Акуст. ж., 1980, т. 26, № 3, с. 383–390.
2. *Питаевский Л. П.* Вычисление фононной части силы взаимного трения в сверхтекучем гелии.– ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 5, с. 1271–1275.
3. *Ferziger J. H.* Low-frequency acoustic scattering from a trailing vortex,– J. Acoust. Soc. Amer., 1974, v. 56, № 6, p. 1705–1707.

Институт
прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22.I.1981