АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 5

УДК 534.26

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ В АКУСТИЧЕСКИ АКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ

Вужва А. Д.

Рассмотрен вопрос о генерации второй гармоники при распространении поперечных упругих волн вдоль оси третьего порядка в кристалле кварца. Показано, что наличие пространственной дисперсии, существенной для гиперзвуковых волн, приводит к нарушению условий фазового синхронизма.

Акустическая активность кристаллов [1–3] является одним из проявлений пространственной дисперсии, поэтому величина этого эффекта определяется параметром a/λ (a – период кристаллической решетки, λ – длина волны). Хотя даже для волн гиперзвуковых частот этот параметр является малым, наличие пространственной дисперсии может существенно изменить характер протекания нелинейных процессов. Особенно это относится к процессам когерентным, в частности к генерации гармоник.

Вопрос о генерации второй гармоники в акустически активном кристалле мы рассмотрим на примере кварца (класс симметрии 32). Кристалл кварца представляет в этом смысле интерес, во-первых, потому что при распространении поперечных волн вдоль оси третьего порядка (именно в этом случае проявляется эффект акустической активности) возможна генерация гармоник, во-вторых, потому что мы имеем возможность сделать количественные оценки, так как в кварце эффект акустической активности исследовался экспериментально [4, 5].

С учетом пространственной дисперсии в первом приближении по малому параметру a/λ и нелинейных членов, квадратичных по вектору упругого смещения, уравнения для распространения поперечных волн вдоль оси третьего порядка имеют вид

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\gamma_{543}\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}=-C_{444}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}\right),\tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-C_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\gamma_{543}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_3}=C_{444}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}\right).\tag{2}$$

Здесь u_1, u_2 – компоненты вектора упругого смещения, C_{44}, C_{444} – компоненты тензоров упругих модулей второго и третьего порядков, γ_{543} – компонента тензора акустической активности, ρ – плотность кристалла.

В линейном приближении (правая часть уравнений в этом случае равна нулю) решение представляет собой волны правой и левой круговой поляризации, распространяющиеся с различными фазовыми скоростями

$$v=v_0\mp 0{,}5(\gamma_{543}/C_{44})\,\omega,\tag{3}$$

где $v_0=(C_{44}/\rho)^{1/2}$, ω – частота. Волну линейной поляризации можно представить суперпозицией волн круговой поляризации. Фазовая скорость этой волны есть v_0, а плоскость поляризации поворачивается по мере распространения вдоль кристалла. Угол поворота на единице длины

$$\Phi=0{,}5(\gamma_{543}/C_{44})\cdot(\omega^2/v_0^2).\tag{4}$$

Решая задачу о генерации гармоник, мы рассмотрим отдельно три случая: генерацию гармоник волнами левой, правой круговой поляризации и линейно-поляризованной волной.

Волна левой круговой поляризации имеет компоненты смещения

(5) $$u_1=u_0\cos[\omega t-k_л(\omega)x],$$

(6) $$u_2=u_0\sin[\omega t-k_л(\omega)x].$$

Значение модуля волнового вектора на частоте ω

(7) $$k_л(\omega)=k_0(\omega)+\Delta k(\omega)=\omega/v_0+0{,}5(\gamma_{543}/C_{44})\cdot(\omega^2/v_0^2).$$

Уравнения для гармоники имеют вид

(8) $$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\gamma_{543}\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}=-C_{444}u_0^2k_0^3(\omega)\cos[2\omega t-2k_л(\omega)x],$$

(9) $$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-C_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\gamma_{543}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}=C_{444}u_0^2k_0^3(\omega)\sin[2\omega t-2k_л(\omega)x].$$

На границе кристалла ($x=0$) амплитуда гармоники должна быть равна нулю. Этому условию удовлетворяет решение

(10) $$u_1=-\frac{1}{4}\frac{C_{444}}{C_{44}}u_0^2k_0^2(\omega)\frac{\sin[\Delta k(\omega)x]}{\Delta k(\omega)}\times$$
$$\times\sin[2\omega t-2k_л(\omega)x+\Delta k(\omega)x],$$

(11) $$u_2=\frac{1}{4}\frac{C_{444}}{C_{44}}u_0^2k_0^2(\omega)\frac{\sin[\Delta k(\omega)x]}{\Delta k(\omega)}\cos\times$$
$$\times[2\omega t-2k_л(\omega)x+\Delta k(\omega)x].$$

Таким образом, волна левой круговой поляризации генерирует гармонику такой же поляризации. Наличие пространственной дисперсии нарушает фазовый синхронизм, так как $k_л(2\omega)\neq 2k_л(\omega)$, поэтому амплитуда гармоники является периодической функцией координаты в направлении распространения волны, т. е. испытывает пространственные биения с периодом

(12) $$x_0=\pi/\Delta k(\omega)=2\pi(C_{44}/\gamma_{543})\cdot(v_0^2/\omega^2).$$

Аналогичный результат получается для волны правой круговой поляризации. Такая волна генерирует гармонику правой круговой поляризации, амплитуда которой периодически изменяется в направлении распространения. Величина этого периода определяется формулой (12).

Компоненты смещения для волны линейной поляризации

(13) $$u_1=2u_0\cos[\Delta k(\omega)x]\cos[\omega t-k_0(\omega)x],$$

(14) $$u_2=-2u_0\sin[\Delta k(\omega)x]\cos[\omega t-k_0(\omega)x].$$

Из уравнений для гармоники мы выпишем лишь правые части

(15) $$F_1(2\omega)=C_{444}u_0^2k_0^3(\omega)\{\cos[2\omega t-2k_п(\omega)x]-$$
$$-\cos[2\omega t-2k_л(\omega)x]\},$$

(16) $$F_2(2\omega)=C_{444}u_0^2k_0^3(\omega)\{\sin[2\omega t-2k_п(\omega)x]+$$
$$+\sin[2\omega t-2k_л(\omega)x]\}.$$

Члены со значениями волнового вектора $k_л(\omega)\pm k_п(\omega)$ отсутствуют, следовательно, волны разной круговой поляризации не взаимодействуют, поэтому решение для гармоники, генерируемой волной линейной поляризации, является просто суммой решений для гармоник, генерируемых каждой из волн круговой поляризации. В результате гармоника имеет линейную поляризацию

(17) $$u_1=\frac{1}{2}\frac{C_{444}}{C_{44}}u_0^2k_0^2(\omega)\frac{\sin[\Delta k(\omega)x]}{\Delta k(\omega)}\times$$
$$\times\sin[2\Delta k(\omega)x]\cos[2\omega t-2k_0(\omega)x],$$

$$(18)\qquad u_2=\frac{1}{2}\frac{C_{444}}{C_{44}}u_0^2k_0^2(\omega)\frac{\sin[\Delta k(\omega)x]}{\Delta k(\omega)}\times$$
$$\times\cos[2\Delta k(\omega)x]\cos[2\omega t-2k_0(\omega)x].$$

В отсутствии пространственной дисперсии ($\Delta k(\omega)=0$) угол между плоскостями поляризации волны с частотой ω и гармоники составляет 90°. Фазовые скорости этих волн одинаковы и равны v_0, поэтому амплитуда гармоники монотонно возрастает по мере распространения волны вдоль кристалла. В акустически активном кристалле ($\Delta k(\omega)\neq 0$) фазовые скорости волны с частотой ω и гармоники тоже одинаковы и равны v_0, однако амплитуда гармоники испытывает пространственные биения с периодом, определяемым формулой (12). Связано это с тем, что плоскости поляризации волны с частотой ω и гармоники поворачиваются при распространении волн вдоль кристалла, причем угол между этими плоскостями периодически меняется, так как для волны частоты ω величина угла поворота плоскости поляризации $\varphi=\Delta k(\omega)x$, а для гармоники – в 2 раза больше.

Для кристалла кварца можно сделать численные оценки угла поворота плоскости поляризации гармоники и периода пространственных биений ее амплитуды. По данным [4, 5], на частоте 10^9 Гц угол поворота плоскости поляризации $\varphi=125°$ на 1 см. Для гармоники получим: $x_0=1,5$ см, а величина вращения плоскости поляризации – 250° на 1 см.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А. А.* О естественном вращении плоскости поляризации звука.– Изв. вузов, Радиофизика. 1960, т. 3, с. 645–649.
2. *Portigal D. L., Burstein E.* Acoustical Activity and other First Order Spatial Dispersion Effects in Crystals. Phys. Rev., 1968, v. 170, p. 673–678.
3. *Вужва А. Д., Лямов В. Е.* Акустическая активность и другие эффекты, обусловленные пространственной дисперсией в кристаллах.– Кристаллография, 1977, т. 22, № 1, с. 131–137.
4. *Pine A. S.* Direct Observations of Acoustical Activity in α-Quartz. Phys. Rev., 1970, v. B2, p. 2049–2054.
5. *Брыжина М. Ф., Есаян С. Х.* Акустическая активность тригональных кристаллов.– ФТТ, 1978, т. 20, с. 2628–2636.

Поступила в редакцию
28.IV.1981

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР