АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 2

УДК 534.222

К ВОПРОСУ ОБ АКУСТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСАХ В НЕЛИНЕЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Зарембо Л. К., Суховцев В. В.

Проведен расчет амплитуды второй сдвиговой гармоники сдвиговой волны в среде с одномерной структурой остаточных деформаций, масштабы которых сравнимы с длиной звуковой волны. Сформулированы условия резонансного возрастания гармоники.

В ряде задач нелинейной акустики коэффициент квадратичной нелинейности нельзя рассматривать как постоянную величину. Среду, в которой этот коэффициент зависит от координат, будем называть нелинейно-неоднородной. Одним из примеров нелинейно-неоднородной среды может быть твердое тело с остаточными внутренними напряжениями. В такой среде становится возможной генерация второй сдвиговой гармоники [1—3]. Отметим, что в анизотропных средах, вообще говоря, генерация этой гармоники не запрещена, и причиной генерации в кристаллах может быть разориентация [4]; более сложен случай генерации гармоники при распространении звука вдоль осей третьего порядка, когда поляризация гармоники отличается от поляризации исходной волны [5].

В работе [3] рассмотрена одномерная модель твердого тела с аддитивными остаточными смещениями и для смещения $u(x, t)$ в сдвиговой волне получено уравнение

$$c^{-2}u_{tt}-u_{xx}=(\alpha s_{xx}{}^{x}+\beta s_{xx}{}^{z})u_x+(\alpha s_x{}^{x}+\beta s_x{}^{z})u_{xx}+\gamma s_x{}^{z}u_xu_{xx}+\frac{1}{2}\gamma s_{xx}{}^{z}u_x{}^2, \tag{1}$$

здесь $c=(\mu/\rho_0)^{1/2}$, $\alpha={}^4/_3+(\tilde{K}+B)/\mu$; $\beta=A/2\mu$; $\gamma=4+(6\tilde{K}+6A+9B+6F)/2\mu$; μ и $\tilde{K}$ — модули второго, A, B — модули третьего и F — модуль четвертого порядков; $s^{z,x}(x)$ — известные остаточные смещения по осям Z и X. Считая амплитуду звука u_0 малой, $ku_0\sim\varepsilon$ — малый параметр, k — волновое число. Тогда при $s_x^{z,x}\sim Ks_0\sim\varepsilon^n$, $1/K$ — характерный масштаб остаточных смещений, s_0 — характерная величина остаточного смещения и $K/k\sim\varepsilon^q$, члены правой части (1) имеют соответственно порядок малости ε^{n+q+1}; ε^{n+1}; ε^{n+2}; ε^{n+q+2}. Найдено [3] решение (1) при $n=1$ и $q=2$, т. е. для крупномасштабных неоднородностей. Для слабых неоднородностей ($n=1$), масштаб которых сравним с длиной волны ($q=0$), из (1) следует уравнение третьего приближения

$$c^{-2}u_{tt}'''-u_{xx}'''=\gamma\Phi(x)u_{xx}'u_x'+\gamma\Phi_x(x)(u_x')^2/2=\gamma\frac{\partial}{\partial x}[\Phi(x)(u_x')^2/2], \tag{2}$$

где введено обозначение $\Phi(x)=s_x{}^z$.

Рассмотрим задачу о генерации гармоники в полубесконечной нелинейно-неоднородной среде. Решение уравнения первого приближения возьмем в виде $u'=u_0\sin\tau$, где $\tau=\omega t-kx$; тогда из (2):

$$c^{-2}u_{tt}'''-u_{xx}'''=\Gamma k\Phi(x)\sin 2\tau+\Gamma\Phi_x(x)\cos 2\tau/2, \tag{3}$$

где $\Gamma=\gamma u_0{}^2k^2/2$. В правой части (3) опущен член, независящий от времени. Решение (3) должно удовлетворять условиям

$$u'''(0, t)=0,\quad u'''(x, t)\,|_{\Phi(x)\equiv 0}=0, \tag{4}$$

а $\Phi(x)$ должно удовлетворять очевидному условию $\Phi(0)=0$.

Будем искать решение (3) в виде

$$u'''(x, t)=\eta(x)\sin 2\tau+v(x)\cos 2\tau. \tag{5}$$

Очевидно, что из-за условий, накладываемых на масштабы остаточных деформаций, в (5) η и v нельзя считать медленно меняющимися функциями. Из (5) и (3) следует

$$\begin{aligned} &\eta_{xx}+16k^2\eta=k\Gamma\Phi(x)+C,\\ &v_{xx}+16k^2v=k\Gamma F(x)+D, \end{aligned} \tag{6}$$

где $F(x)=-4k\int\limits_0^x \Phi(\xi)\,d\xi-\Phi_x(x)/2k$, C и D — постоянные интегрирования.

Рассмотрим случай периодически неоднородной среды

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin n\varkappa x, \tag{7}$$

где $\varkappa=2\pi/\Lambda$. Из (6) и (7) решение (3) с учетом условий (4) имеет вид

$$u'''(x,t)=k\Gamma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n}{16k^2-n^2\varkappa^2}\Big[\sin n\varkappa x\sin 2\tau+ \\ +\left(\frac{4k}{n\varkappa}-\frac{n\varkappa}{2k}\right)(\cos\varkappa x-1)\cos 2\tau\Big]. \tag{8}$$

При резонансных условиях $4k\simeq m\varkappa$ длина волны второй гармоники $\lambda_{2\omega}\simeq 2\Lambda/m$ — это соответствует брэгговским условиям генерации гармоники в периодической структуре; соответствующий член в разложении (8) при этом обращается в стоячую волну. Естественно, что в области брэгговского резонанса решение (8) перестает быть справедливым не только потому, что не учитывались диссипативные процессы, но и в силу использованного метода.

Далее рассмотрим задачу о генерации сдвиговой гармоники в слое. Это позволяет не ограничивать задачу как выше периодическим распределением. Действительно, при толщине слоя L очевидным условием для $\Phi(x)$ является $\Phi(0)=\Phi(L)=0$ и, периодически продолжая $\Phi(x)$ на отрезке $(0, 2L)$, можно получить:

$$\Phi(x)=-\sum_{n=1}^{\infty} N_n\sin(n\pi/L)(L-x)=-\sum_{n=1}^{\infty} N_n\sin\beta_n\xi, \tag{9}$$

где $\beta_n=n\pi/2kL$, $\xi=2k(L-x)$. Решение линейной задачи для слоя, в котором при $x=0$ имеется возбуждение $u_0\cos\omega t$, а при $x=L$ граница свободна:

$$u'=u_0\cos k(L-x)\cos\omega t/\cos kL. \tag{10}$$

Уравнение третьего приближения, имея в виду (10) и (9):

$$c^{-2}u_{tt}'''-4k^2u_{\xi\xi}'''=\Psi_1(\xi)+\Psi_2(\xi)+\Psi_3(\xi), \tag{11}$$

где введены обозначения:

$$\Psi_1=2k\Gamma_1\sum_{n=1}^{\infty} N_n\beta_n\cos\beta_n\xi;$$

$$\Psi_2=-k\Gamma_1\sum_{n=1}^{\infty} N_n\beta_n\cos\beta_n\xi\cos\xi;$$

$$\Psi_3 = k\Gamma_1 \sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin \beta_n \xi \cos \xi;$$

$$\Gamma_1 = \gamma k^2 u_0^2 \cos 2\omega t / 4 \cos^2 kL.$$

Решение (11) с граничными условиями

$$u'''(\xi, t)|_{\xi=2kL} = \left.\frac{\partial u'''(\xi, t)}{\partial x}\right|_{\xi=0} = 0$$

можно представить в виде $u'''(\xi, t) = u_1 + u_2 + u_3$, причем

$$u_1 = \frac{\Gamma_1}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n N_n}{\beta_n^2 - 1} (\cos \beta_n \xi - \cos n\pi),$$

$$u_2 = -\frac{\Gamma_1}{8k} \sum_{n=1}^{\infty} N_n \left\{ \frac{\cos(\beta_n + 1)\xi - \cos 2(\beta_n + 1)kL}{\beta_n + 2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(\beta_n - 1)\xi - \cos 2(\beta_n - 1)kL}{\beta_n - 2} \right\},$$

(12)

$$u_3 = -\frac{\Gamma_1}{8k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{\beta_n} \left\{ \frac{\cos(\beta_n + 1)\xi - \cos 2(\beta_n + 1)kL}{\beta_n + 2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(\beta_n - 1)\xi - \cos^2(\beta_n - 1)kL}{\beta_n - 2} \right\}.$$

Резонансы второй гармоники, которых в однородном слое вообще не должно было бы быть, в соответствии с (12) в нелинейно-неоднородном слое должны иметь место, во-первых, при линейном резонансе

(13) $$L = (2n - 1)\lambda/4, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

во-вторых, при условии $\beta_n = 1$:

(14) $$L = n\lambda/4, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и в-третьих, при условии $\beta_n = 2$:

(15) $$L = n\lambda/8, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Легко видеть, что при (13) выполняются и (14) и (15), т. е. резонансы (13) трехкратно вырождены. Резонансы (14) двукратно вырождены. Можно, однако, показать, что положения резонансов определяются лишь резонансами типа (13) и (15). Покажем, что резонансы (14) совпадают с (13).

На свободной границе слоя $\xi = 0$. Из (12) имеем

(16) $$u_1(L, t) = \frac{\Gamma_1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{2m-1} N_{2m-1}}{\beta_{2m-1}^2 - 1},$$

откуда видно, что резонансы типа (14) имеют место лишь при нечетных n и, следовательно, совпадают с (13). Аналогично легко показать, что из системы резонансов (15) исключаются резонансы с $n = 4\sigma$ ($\sigma = 1, 2, 3, \ldots$). Таким образом, резонансы второй гармоники (13)—(15) имеют место при условии (13), причем они трехкратно вырождены; эти основные резонансы имеют боковые компоненты, отстоящие от основного резонанса на $\lambda/8$ и удовлетворяющие условию (15). Отметим, что вырождение наблюдается в зависимости от частоты внешнего возбуждения, однако оно обусловлено различными фурье-компонентами N: если резонансы (13) обусловлены всеми фурье-компонентами, то (14) — только нечетными. Следует также оста-

новиться на фазовых соотношениях до и после резонанса. Если резонансы типа (13) не сопровождаются изменением фазы, то резонансы (14) и (15) приводят к изменению фазы на противоположную; это, очевидно, в условиях вырождения должно приводить к асимметрии основных резонансов (13). Отметим, что основные резонансы наблюдались экспериментально в [7].

В заключение обсудим возможность исследования пространственных спектров остаточных внутренних напряжений. В условиях, близких к распространению в полубесконечной среде, частотное сканирование и наблюдение брэгговского пространственного отражения принципиально позволяют определить спектр. Естественно, что в реальных условиях потери будут сглаживать брэгговский резонанс, порядок величины которого из (8) $u_0'''\sim k\Gamma N_n Q_n$, где Q_n — эффективная добротность. При $\gamma\simeq 10$, $ku_0\simeq 10^{-5}$, $N_n\simeq 10^{-6}$, $k\simeq 60$ см$^{-1}$, $Q_n\simeq 10^2$ амплитуда второй гармоники $u_0'''\simeq 3\times 10^{-12}$ см, а отношение $u_0'''/u_0\simeq 2\times 10^{-5}$. Эти резонансы, хотя и слабые, вероятно, можно наблюдать в импульсном режиме или на достаточно длинных образцах (полное затухание звука) как непрерывную «реверберацию» на удвоенной частоте.

Сделаем оценку по порядку величины смещения на частоте второй гармоники для слоя в условиях основного резонанса (13), для которого без временного множителя $\Gamma_1\simeq\gamma(k^2u_0^2/4)Q_1^2$, где Q_1 — добротность на резонансе (13). При $ku_0\simeq 10^{-5}$, $k\simeq 60$ см$^{-1}$, $\gamma\simeq 10$, $Q_1\simeq 10^2$: $\Gamma_1\simeq 2{,}5\times 10^{-6}$ и из (12) $u_1\simeq 2\times 10^{-8}\ N_nQ_n$, где Q_n — добротность резонанса (14). Для $N_n\simeq 10^{-6}$ и $Q_n\simeq 10$: $u_1\simeq 2\times 10^{-13}$ см; это величина вполне измеримая при низком уровне шумов приемного тракта, что подтверждается результатами, приведенными в [7].

Измерение основных резонансов в достаточно широкой полосе частот позволяет получить сведения о спектре структуры остаточных внутренних напряжений. Боковые резонансы, при которых не выполняются условия (13), по порядку величины должны быть в Q_1^2 раз меньше резонансов (13), и их наблюдение возможно лишь при достаточно высоких уровнях звука.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гедройц А. А., Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Сдвиговые волны конечной амплитуды в поли- и монокристаллах металлов.– Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 3, с. 515–518.
2. *Зарембо Л. К., Шкловская – Корди В. В.* О генерации гармоник при распространении ультразвуковых продольных и сдвиговых волн в твердых телах.– Физ. тв. тела, 1970, т. 12, № 12, с. 3637–3639.
3. *Зарембо Л. К., Прохоров В. М.* Генерация второй сдвиговой гармоники в средах с остаточными внутренними деформациями.– Акуст. ж., 1975, т. 21, № 2, с. 198–202.
4. *Леманов В. В., Юшин Н. К.* Генерация гармоник поперечных упругих волн в кристаллах.– Физ. тв. тела, 1972, т. 14, № 8, с. 2373–2377.
5. *Ермилин К. К., Красильников В. А., Лямов В. Е., Прохоров В. М.* Поляризация второй сдвиговой гармоники при распространении акустической волны вдоль оси третьего порядка в кристаллах.– Физ. тв. тела, 1972, т. 15, № 7, с. 2251–2252.
6. *Ермилин К. К., Красильников В. А., Лямов В. Е., Прохоров В. М.* Коническая рефракция и коллинеарное взаимодействие сдвиговых упругих волн в кристаллах.– Физ. тв. тела, 1973, т. 18, № 10, с. 3133–3135.
7. *Зарембо Л. К., Шкловская – Корди В. В.* К вопросу о нелинейных колебаниях акустических резонаторов на твердом теле.– Тр. VIII Всес. акуст. конф. М.: 1973, т. MV$_{\text{B}}$–2, с. 131–134.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.II.1981