АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII 1981 Вып. 1

УДК 534.26

ВЗАИМНЫЙ ИМПЕДАНЦ СЛОЖНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Гнитецкий В. А.

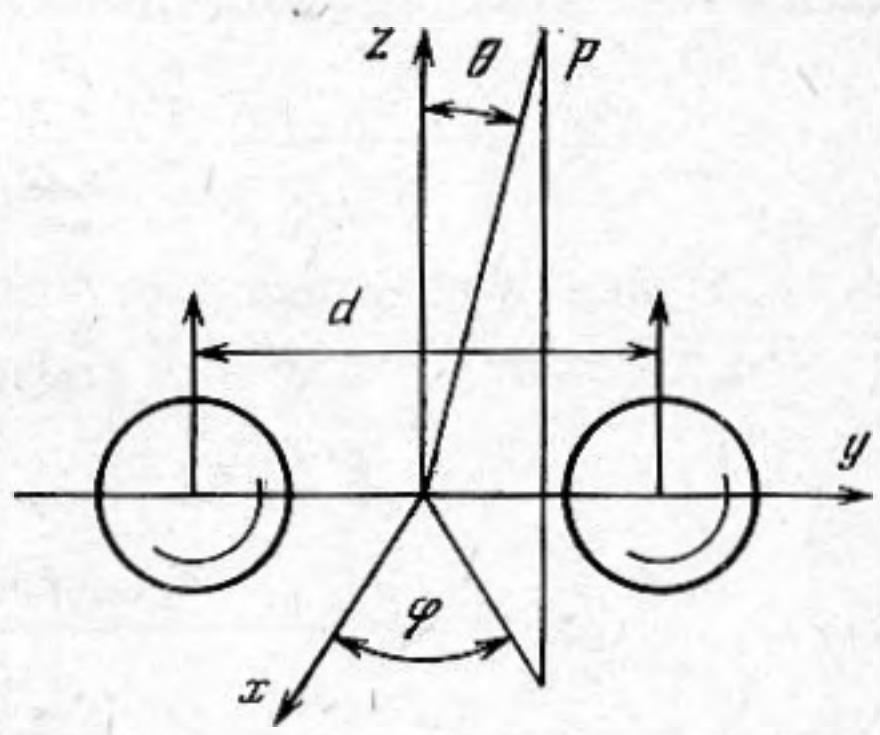
Получены выражения для определения взаимного импеданца сложных сферических источников, максимумы характеристик направленности которых ориентированы перпендикулярно плоскости, проходящей через их центры.

Вычислим взаимный импеданц двух сложных сферических излучателей, расположенных на удалении d друг от друга, максимумы характеристик направленности которых ориентированы перпендикулярно плоскости, проходящей через их центры (фиг. 1).

Для этого рассмотрим антенну, состоящую из двух идентичных сферических излучателей, работающих синфазно. Как известно [1], полный импеданц такой антенны определяется выражением

$$Z=2W/|\varepsilon|^2=2Z_1=\\=2(Z_{11}+Z_{12}), \tag{1}$$

где W — полная мощность, излучаемая антенной, ε — приведенная колебательная скорость излучающей поверхности, Z_{11} и Z_{12} — собственный и взаимный импеданцы одного из излучателей антенны.



Фиг. 1. Система координат

В соответствии с работой [2] полная мощность, излучаемая антенной с реализуемой характеристикой направленности, может быть вычислена интегрированием квадрата модуля характеристики направленности $D(\theta, \varphi, r)$ по действительным и мнимым значениям θ и φ:

$$W=\frac{r^2}{\rho c}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{0-i\infty}^{\pi+i\infty}|D(\theta,\varphi,r)|^2\sin\theta d\theta d\varphi. \tag{2}$$

После подстановки этого выражения в формулу (1) с учетом равенства $D(\theta, \varphi, r)=P_0(r)D(\theta, \varphi)$ получим

$$Z_1=\frac{|P_0(r)|^2r^2}{|\varepsilon|^2\rho c}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{0-i\infty}^{\pi+i\infty}|D(\theta,\varphi)|^2\sin\theta d\theta d\varphi, \tag{3}$$

где $P_0(r)$ — давление, развиваемое в максимуме характеристики направленности на удалении r от антенны.

Согласно теореме умножения, $D(\theta, \varphi)$ антенны, состоящей из двух одинаково ориентированных сфер, равна произведению характеристик

направленности одиночного сферического излучателя $D_1(\theta, \varphi)$ на характеристику направленности двух точечных элементов $D_2(\theta, \varphi)$:

$$D(\theta, \varphi) = D_1(\theta, \varphi) D_2(\theta, \varphi). \tag{4}$$

Заметим, что выражение (4) не учитывает влияния дифрагированных волн и поэтому справедливо для излучателей малых волновых размеров. В принятой системе координат $D_2(\theta, \varphi) = \cos(kd \sin\theta \sin\varphi/2)$, а характеристику направленности одиночного излучателя можно представить в виде [3]

$$D_1(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \tag{5}$$

где C_n — коэффициенты разложения углового распределения поля в дальней зоне по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

После подстановки выражений (4) и (5) в формулу (3) и интегрирования по φ с учетом соотношения $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ получим

$$Z_1 = \frac{|P_0(r)|^2 r^2}{|\varepsilon|^2 \rho c} \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} [1 + J_0(kd \sin\theta)] \times \tag{6}$$

$$\times \Big[\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Big]^2 \sin\theta \, d\theta,$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Первый член в подынтегральном выражении (6) определяет собственный импеданц одиночного излучателя Z_{11} и имеет действительную часть:

$$R_{11} = \frac{|P_0(r)|^2 r^2}{|\varepsilon|^2 \rho c} \int_0^{\pi} \Big[\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) \Big]^2 \sin\theta \, d\theta \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2.$$

Второй член, учитывающий расстояние d между излучателями, соответствует взаимному импеданцу Z_{12}, нормированное значение которого равно:

$$\frac{Z_{12}}{R_{11}} = \frac{\int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} J_0(kd \sin\theta) \Big[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta) C_n) \Big]^2 \sin\theta \, d\theta}{\int_0^{\pi} \Big[\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) \Big]^2 \sin\theta \, d\theta}. \tag{7}$$

Представляя квадрат суммы в подынтегральных выражениях (7) в виде

$$\Big[\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) \Big]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 P_n^2(\cos\theta) + \frac{1}{2} \sum_{n \neq s} C_n C_s P_n(\cos\theta) P_s(\cos\theta)$$

и используя свойство ортогональности полиномов Лежандра с учетом равенства

$$\int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} J_0(kd \sin\theta) P_n(\cos\theta) P_s(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \begin{cases} 2 \int_0^{\pi/2+i\infty} & \text{при } n+s=2m, \\ 0 & \text{при } n+s=2m+1, \end{cases}$$

придем к выражению

$$(8)\qquad \frac{Z_{12}}{R_{11}}=\frac{\int\limits_0^{\pi/2+i\infty} J_0(kd\sin\theta)\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n^2P_n^2(\cos\theta)\right.}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n^2/2n+1}+$$

$$+\frac{\left.\frac{1}{2}\sum\limits_{n\neq s}C_nC_sP_n(\cos\theta)P_s(\cos\theta)\right]\sin\theta\,d\theta}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n^2/2n+1}.$$

Так как сложный сферический излучатель, согласно формуле (5), может быть представлен суммой простых излучателей n-го порядка, то интеграл в формуле (8) определяет собой вносимый импеданц в n-ю моду одного излучателя s-й модой колебаний второго.

После замены полиномов Лежандра соответствующими разложениями по степеням $\cos\theta$ интеграл в формуле (8) сводится к сумме интегралов вида

$$J_m^Z(kd)=J_m^R(kd)+J_m^X(kd)=\int\limits_0^{\pi/2} J_0(kd\sin\theta)\cos^{2m}\sin\theta\,d\theta+$$

$$+\int\limits_{\pi/2+i0}^{\pi/2+i\infty} J_0(kd\sin\theta)\cos^{2m}\theta\sin\theta\,d\theta.$$

Значения $J_m^R(kd)$ могут быть вычислены при помощи интеграла Сонина [4]:

$$J_m(kd)=\frac{(kd)^{m+1/2}}{2^{m-1/2}\Gamma_{m+1/2}}\int\limits_0^{\pi/2} J_0(kd\sin\theta)\cos^{2m}\theta\sin\theta\,d\theta.$$

Откуда после замены бесселевой функции сферической функцией Бесселя $j_m(kd)$ получим

$$(9)\qquad J_m^R(kd)=2^m\Gamma_{m+1/2}j_m(kd)/(kd)^m\pi^{1/2},$$

где $\Gamma_{(x)}$ — гамма-функция.

Для вычисления интеграла $J_m^X(kd)$ аналогично работе [4] проведем замену переменных:

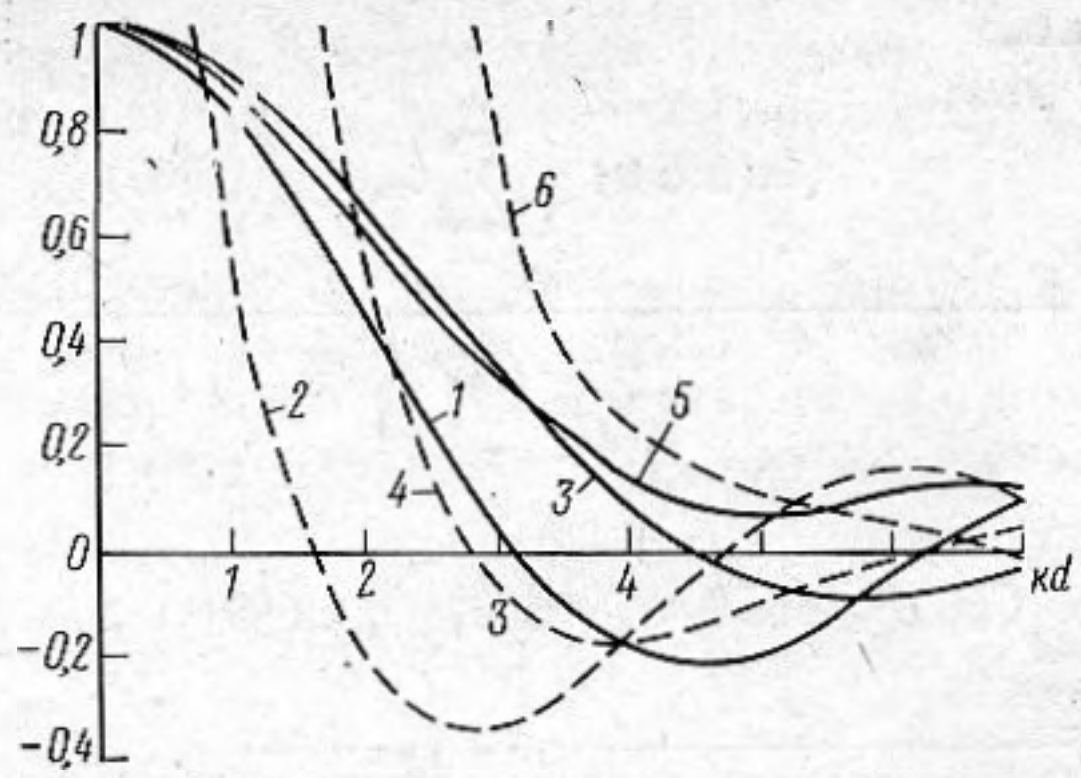
$$t=ik\cos\theta,\ \sin\theta=(k^2+t^2)^{1/2}/k,\ dt=-ik\sin\theta d\theta.$$

Тогда

$$(10)\qquad J_m^X(kd)=-\int\limits_0^{\infty} J_0[d(k^2+t^2)^{1/2}]t^{2m}\,dt/(ik)^{2m+1}.$$

Подынтегральную функцию Бесселя представим в виде контурного интеграла [4]:

$$(11)\qquad J_\varepsilon(x)=\frac{(\omega/2)^\varepsilon}{2\pi i}\int\limits_c u^{-\varepsilon-1}\exp(u-\omega^2/4u)\,du.$$



Фиг. 2 Зависимости активной (*1*, *3*, *5*) и реактивной (*2*, *4*, *6*) составляющих взаимного импеданца от параметра kd простых излучателей нулевого, первого и второго порядков соответственно

Приравнивая величину ω, входящую в формулу (11), к переменной $d(t^2+k^2)^{1/2}$, а ε к 0, в результате подстановки выражения (11) в формулу (10) и замены порядка интегрирования получим

(12)

$$J_m^x(kd)=\frac{-1}{2\pi i(ik)^{2m+1}}\int\limits_c u^{-1}\exp\left(u-\frac{k^2d^2}{4u}\right)\left[\int\limits_0^\infty t^{2m}\exp\left(-\frac{d^2t^2}{4u}\right)dt\right]du.$$

Интеграл по t в формуле (12) может быть вычислен при помощи соотношения (4):

$$\int\limits_0^\infty \exp(-p^2t^2)\,t^{2\mu+1}\,dt=\Gamma(\mu+1)/2(p^2)^{\mu+1}. \tag{13}$$

Подставляя выражения (13) в формулу (12) при $p^2=d^2/4u$ и $\mu=(2m-1)/2$ и повторно применяя представление (11) при $\varepsilon=-(2m+1)/2$ и $\omega=kd$, после замены функций Бесселя сферической функцией Неймана $\eta_m(x)$ придем к выражению

$$J_m^x(kd)=-i\Gamma_{(m+1/2)}2^m\eta_m(kd)/(kd)^m\pi^{1/2}. \tag{14}$$

Складывая выражения (9) и (14), окончательно получим

(15)

$$J_m^z(kd)=\Gamma_{(m+1/2)}2^m h_m^{(2)}(kd)/(kd)^m\pi^{1/2}=1\cdot3\cdot5\ldots(2m-1)\,h_m^{(2)}(kd)/(kd)^m,$$

где $h_m^{(2)}(x)$ — сферическая функция Ганкеля второго рода.

Выражения (8) и (15) позволяют вычислить взаимный импеданц сложных сферических источников малых волновых размеров при помощи сферических функций Ганкеля, порядок которых не превышает порядка коэффициентов C_n.

В частности, для излучателей нулевого порядка по формулам (8) и (15) получим известное выражение [1]

$$\frac{Z_{12}^0}{R_{11}^0}=h_0^{(2)}(kd)=\frac{\sin kd}{kd}+i\frac{\cos kd}{kd}=\frac{R_{12}}{R_{11}}+i\frac{X_{12}}{R_{11}}. \tag{16}$$

Для простых излучателей первого и второго порядков получим:

$$\frac{Z_{12}^1}{R_{11}^1}=\frac{3h_1^{(2)}(kd)}{kd};\quad \frac{Z_{12}^2}{R_{11}^2}=\frac{5}{4}\left[h_0^{(2)}(kd)-6\frac{h_1^{(2)}(kd)}{(kd)}+27\frac{h_2^{(2)}kd}{(kd)^2}\right]. \tag{17}$$

Зависимости изменения составляющих взаимного импеданца излучателей нулевого, первого и второго порядков, рассчитанные по формулам (16) и (17), приведены на фиг. 2.

Следует отметить, что значения X_{12}/R_{11}, рассчитанные по формулам (8) и (15), согласуются с приближенными результатами (5) при $kd>6$ и существенно расходятся при $kd<3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скучик Е.* Основы акустики. М.: Мир, 1976, т. 11.
2. *Минкович Б. М., Яковлев В. П.* Теория синтеза антенн. М.: Советское радио, 1969.
3. *Карновский М. И.* К расчету сопротивления излучения некоторых распределенных систем излучателей.– Акуст. ж., 1956, т. 2, № 3, с. 267–278.
4. *Pritchard R. L.* Mutual Acoustic Impedance between Radiators in an Infinite Rigid Plane.— J. Acoust. Soc. America, 1960, v. 32, № 6, p. 730–737.
5. *Вендик О. Г.* Антенны с немеханическим движением луча. М.: Советское радио, 1965.

Киевский политехнический институт
им. 50-летия
Великой Октябрьской
социалистической революции

Поступила
19 сентября 1979 г.
После исправления
30 июня 1980 г.