5. *Marsh H. W., Mellen R. H., Konrad W. L.* Anomalous absorption of pressure waves from explosions in sea water. J. Acoust. Soc. America, 1965, *39*, 2, 326–328.
6. *Scretting A., Leroy C. C.* Sound attenuation between 200 Hz and 10 kHz. J. Acoust. Soc. America, 1971, *49*, 1 (11), 276–282.
7. *Коул Р.* Подводные взрывы. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
8. *Пелиновский Е. Н., Петухов Ю. В., Фридман В. Е.* Приближенные уравнения распространения мощных акустических сигналов в океане. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1979, *15*, 4, 436–444.
9. *Петухов Ю. В., Фридман В. Е.* Частотные характеристики взрывных сигналов. Препринт НИРФИ № 126. Горький, 1979.

Горьковский научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила 18 июня 1979 г.
После исправления 15 октября 1979 г.

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ НЕПОДВИЖНОГО ИСТОЧНИКА ШУМА

А. А. Пудовкин

Доступными для измерения являются разложения Фурье $v_i(\mathbf{x}_j)$ сигналов для всех N элементов антенны, $j=\overline{1, N}$, во всех узких полосах, на которые можно разбить обрабатываемую частотную полосу так, чтобы разложения Фурье, относящиеся к разным полосам, можно было считать независимыми, $i=\overline{1, M}$. Следовательно, вектор воспринимаемого сигнала есть

$$\mathbf{V}^*=[v_1(\mathbf{x}_1), v_1(\mathbf{x}_2), \ldots, v_1(\mathbf{x}_N), v_2(\mathbf{x}_1), \ldots, v_2(\mathbf{x}_N), \ldots, v_M(\mathbf{x}_1), \ldots, v_M(\mathbf{x}_N)].$$

Элемент s корреляционной матрицы сигнала $P=E[\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}^*]$ при анализе, аналогичном [1], может быть записан в виде

$$s=\frac{T}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega H(\omega, \mathbf{x}_1) H(\omega, \mathbf{x}_2) S(\omega)\,\frac{\sin(\Omega_i-\omega)T/2}{(\Omega_i-\omega)T/2}\,\frac{\sin(\Omega_j-\omega)T/2}{(\Omega_j-\omega)T/2},$$

где $S(\omega)$ — энергетический спектр сигнала.

Воспользовавшись вышеупомянутой асимптотикой, можно считать последние два множителя в подынтегральном выражении отличными от нуля в узкой частотной области, ширина которой по порядку величины равна T^{-1} в окрестности частот Ω_i и Ω_j, и описывать элемент корреляционной матрицы сигнала произведением первых трех сомножителей подынтегрального выражения в окрестности частоты Ω_i при $i=j$ или считать его равным нулю при $i\neq j$. Вследствие полного разделения различных частотных компонент в квадратичной форме нормального распределения далее можно оперировать с блоками корреляционной матрицы сигнала размером $N\times N$ для каждой частоты с последующим суммированием по частотам аналогично для корреляционной матрицы помехи. Энергетические спектры сигнала $S(\omega)$ и помехи $N(\omega)$ являются общими множителями соответствующих корреляционных функций. Корреляционные матрицы сигнала и помехи представим в виде произведения энергетического спектра на пространственную корреляционную матрицу, которая далее именуется корреляционной матрицей. Поскольку корреляционная матрица помехи Q эрмитова и положительно определена, она унитарным преобразованием U может быть приведена к диагональному виду Λ [2]. Соотношение для элемента корреляционной матрицы сигнала позволяет представить ее в виде произведения вектора $\mathbf{p}$ эрмитово-сопряженный вектор [3]. Для упрощения выкладок корреляционную матрицу сигнала удобно представить произведением векторов g, являющихся проекцией вектора $\mathbf{p}$ на направление собственного вектора корреляционной матрицы помехи. Вследствие линейности преобразований допущение о гауссовости не нарушается, а корреляционная матрица воспринимаемого сигнала будет

$$K=S\cdot g\cdot g^*+N\cdot\Lambda=S\cdot G\cdot I\cdot I^{\mathrm{T}}G^*+N\Lambda,$$

где $I^{\mathrm{T}}=[1, 1, \ldots, 1]$, а G — диагональная матрица с элементами, равными соответствующим элементам вектора g.

$$y(\theta)=-\frac{1}{2}\mathbf{V}^*U\frac{\partial K^{-1}}{\partial\theta}U^*\mathbf{V}-\frac{\operatorname{tr}(N^{-1}\Lambda^{-1}\,\partial K/\partial\theta)}{2[1+(S/N)\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}gg^*)]}.$$

Используя введенные обозначения, можно записать соотношение для логарифма правдоподобия и его производной $y(\theta)$, которое с использованием соотношения для определителя корреляционной матрицы воспринимаемого сигнала приводится к виду

$$\det K = \det N\Lambda[1+(S/N)\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{gg}^*)]$$

Используя формулу для обращения суммы неособенной квадратной матрицы с матрицей первого ранга [2] и свойство используемых матриц

$$\Pi^T G^* \Lambda^{-1} G \Pi^T G^* \Lambda^{-1} G = \operatorname{tr}(G^* \Lambda^{-1} G)\Pi^T G^* \Lambda^{-1} G,$$

получим

$$y(\theta) = -\frac{1}{2}\mathbf{V}^* U \frac{\partial K^{-1}}{\partial\theta} U^* \mathbf{V} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(K^{-1}\frac{\partial K}{\partial\theta}\right). \tag{1}$$

Возвращаясь в пространство измеряемого сигнала, используя соотношение для обращения суммы матрицы полного ранга с матрицей первого ранга и свойства используемых матриц, для производной прадоподобия найдем

$$y(\theta) = \frac{(S/N)^2}{2[1+(S/N)\operatorname{tr}(Q^{-1}\mathbf{pp}^*)]} V^* Q^{-1}[\mathbf{tp}^* + \mathbf{pt}^*]Q^{-1}\mathbf{V} - \tag{2}$$

$$- \frac{(s/n)^3 \dfrac{\partial \operatorname{tr} Q^{-1}\mathbf{pp}^*}{\partial\theta}}{2[1+(S/N)\operatorname{tr}(Q^{-1}\mathbf{pp}^*)]}[\mathbf{V}^* Q^{-1}\mathbf{pp}^* Q^{-1}\mathbf{V} + 1 + (S/N)\operatorname{tr}(Q^{-1}\mathbf{pp}^*)],$$

где $\mathbf{p}$ – вектор передаточных функций волновода для элементов антенны, а $\mathbf{t}$ – вектор производных тех же передаточных функций по оцениваемому параметру.

Для определения элементов $e_{\vartheta r}$ информационной матрицы Фишера продифференцируем соотношение для производной правдоподобия (1) его по одной компоненте вектора местоположения и усредним, с учетом соотношения для математического ожидания квадратичной формы [2] найдем

$$e_{\vartheta r} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\frac{\partial K^{-1}}{\partial r}\frac{\partial K}{\partial\theta}\right],$$

отсюда получим соотношение для элемента матрицы Фишера в пространстве собственных векторов корреляционной матрицы помехи:

$$e_{\vartheta r} = \frac{(S/N)^2}{1+(S/N)\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{gg}^*)}[\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{gg}^*)\operatorname{Re}\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_\vartheta^*) +$$

$$+ \operatorname{Re}\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{g}_r\mathbf{g}^*)\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{g}_\vartheta\mathbf{g}^*)] -$$

$$- \frac{2(S/N)^3}{[1+(S/N)\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{gg}^*)]^2}\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{gg}^*)\operatorname{Re}\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{g}_r\mathbf{g}^*)\operatorname{Re}\operatorname{tr}(\Lambda^{-1}\mathbf{g}_\vartheta\mathbf{g}^*),$$

где нижний индекс у векторов обозначает производную по соответствующему аргументу.

Полученное соотношение определяет не обязательно реализуемую точность. Определим ошибку оптимальной реализуемой оценки (2), воспользовавшись соотношением [3]:

$$D^2(\theta) = D^2(y)/(\partial\bar{y}/\partial\theta)^2.$$

Для математического ожидания производной правдоподобия с учетом соотношения для математического ожидания квадратичной формы [2] справедливо

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[K^{-1}\frac{\partial K}{\partial\theta}(K^{-1}K_0 - E)\right].$$

Здесь и далее индексом ноль будем отмечать величины, соответствующие местоположению источника, без индекса – величины, соответствующие подбираемому значению.

Производная по оцениваемой дистанции от математического ожидания производной правдоподобия по оцениваемому пеленгу есть

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial r}=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{K^{-1}\left[\frac{\partial K}{\partial r}K^{-1}\frac{\partial K}{\partial \theta}(K^{-1}K_0-E)+\right.\right. \tag{3}$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^2 K}{\partial\theta\,\partial r}(K^{-1}K_0-E)-\frac{\partial K}{\partial\theta}\frac{\partial K^{-1}}{\partial r}K_0\right]\right\}.$$

Для среднего значения формы четвертого порядка случайных величин с нулевым математическим ожиданием справедливо

$$\mathbf{V}^*R_1\mathbf{V}\mathbf{V}^*R_2\mathbf{V}=\operatorname{tr}[(R_1+R_2^{\mathrm{T}})PR_2P]+\operatorname{tr}(R_1P)\operatorname{tr}(R_2P).$$

Используя это соотношение, соотношения для производной правдоподобия (1) и ее математического ожидания, для дисперсии найдем

$$D^2(y)=\operatorname{tr}\left[\frac{\partial K^{-1}}{\partial\theta}K_0\frac{\partial K^{-1}}{\partial r}K_0\right]\Big/\,2. \tag{4}$$

Ошибка оптимальной реализуемой оценки (2) при условии $K=K_0$ равна

$$D^2(\theta)=2/\operatorname{tr}\left(\frac{\partial K^{-1}}{\partial\theta}\frac{\partial K}{\partial r}\right).$$

Следовательно, эффективность оптимальной реализуемой оценки (2) равна единице. Дисперсионная матрица любой квазиоптимальной оценки может быть получена при использовании приведенных соотношений для дисперсии (4) и производной математического ожидания правдоподобия (3) при условии, что обозначения без индекса соответствуют используемой матрице обработки сигнала. Следует отметить, что эффективность алгоритма обнаружения при решении задачи измерения равна нулю.

Полученное выше значение дисперсии реализуемой оценки для частного случая линейной антенны в безграничной среде с изотропной помехой дает значение в 2 раза выше аналогичной характеристики, полученной в работе [3]. Легко проверить, например, переходом к одномерному случаю, что в правых частях соотношений (13)–(15) из [3] не хватает делителя – двойки, что и привело к заниженной дисперсии. Полученное значение дисперсии оптимальной реализумой оценки для вышеупомянутых условий больше определенного в работе [1] значения дисперсии для квазиоптимальной оценки. Дело в том, что и в [1] в 2 раза занижена дисперсия квазиоптимальной оценки. В обоих упомянутых случаях ([1] и [3]) в 2 раза занижена граница дисперсии Крамера – Рао, поэтому значение эффективности описанных в [1] и [3] способов остается справедливым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McDonald V. H., Schultheiss P. M.* Optimum Passive Bearing Estimation in a Spatially Incoherent Noise Environment. J. Acoust. Soc. America, 1969, *46*, 1 (1), 37–43.
2. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.
3. *Bangs W. I., Schultheiss P. M.* Space-Time Processing for Optimal Parameter Estimation in Signal Processing. Academic Press, N. Y., 1973, 577–590 (ed. by I. W. R. Griffiths, P. L. Stockling, C. van Schooneveld).

Поступила
18 декабря 1979 г.