АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVI 1980 Вып. 5

УДК 534.222

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

И. В. Хазанов

В нелинейном резонаторе исследовано возбуждение звуковых волн с частотами как меньшими, так и большими частоты источника, настроенного на одну из первых собственных мод. Найдены стационарные спектры волн при малых числах Рейнольдса. Показано, что пороговая величина амплитуды колебаний источника для возбуждения волн низких частот непрерывно возрастает по мере учета все большего числа мод в верхней части спектра. Обнаружено, что амплитуды волн нечетных гармоник частоты слабого сигнала пропорциональны амплитудам соседних с ними гармоник частоты источника. Найдены условия, при которых возможно параметрическое усиление звука.

Исследование взаимодействия волн в нелинейных средах представляет как самостоятельный интерес, так и важно, например, в связи с возможностью создания приборов для параметрического преобразования частоты и усиления звука. Обычно без специальных способов создания дисперсии в нелинейных акустичестких резонаторах число взаимодействующих мод оказывается достаточно большим, поскольку условия синхронизма

$$\omega_p=\omega_e+\omega_m,\quad k_p=k_e+k_m \tag{1}$$

для частот и соответствующих волновых векторов бегущих в одном направлении звуковых волн ($\omega_i=ck_i$, c — скорость звука) всегда удовлетворяются. Рассмотрим такие процессы при малых числах Маха в предположении, что амплитуда одной из волн поддерживается постоянной внешним источником звука. Такая ситуация возникает в резонаторе, с одной стороны которого находится источник звука, а другая стенка жестко закреплена. Пусть частота источника совпадает с частотой одной из собственных мод резонатора, а амплитуда колебаний стенки мала: $a\ll\lambda_i$ ($\lambda_i=2\pi/k_i$ — длины взаимодействующих волн), так что изменением собственных чисел резонатора из-за ее движения можно пренебречь. Будем учитывать только вязкостные потери в среде. Это применимо к резонатору с достаточно большими поперечными размерами [1], когда потери вблизи боковых стенок пренебрежимо малы. Мы также считаем, что затухание основной волны на длине резонатора мало́, и пренебрегаем потерями энергии при отражении волн от стенок. Наконец, мы опускаем эффекты, связанные с линейным параметрическим уширением спектра волн из-за их взаимодействия на движущейся стенке резонатора (см., например, [2]). Это оправдано, если добротность резонатора $Q\gg1$. Так, например, уровень второй гармоники в насыщении за счет только этого процесса $A_2=A_1^2/2\alpha\varepsilon cQ$, а из-за нелинейных эффектов в среде (при жестко закрепленных стенках) $A_2=A_1^2/2\alpha$, $A_1=v_\sim Q\ll c$. (Смысл обозначений пояснен ниже.) Подробный анализ возникающих при этом стоячих волн с учетом их затухания из-за вязкостных потерь в среде и в пограничном слое при перекачке энергии только вверх приведен в работе [3]. В ней показано, что при больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re}\gg1$ в волне устанавливается пилообразный профиль (строго говоря, получающаяся разрывная волна

несколько отличается от пилообразной [3, 4]), а при $\mathrm{Re}\ll 1$ он остается близким к синусоидальному. В работе [5] методом возмущений при $\mathrm{Re}\ll 1$ найдены амплитуды нескольких первых гармоник основной частоты возбуждения. В настоящей работе получены выражения для амплитуд всех гармоник при $\mathrm{Re}\ll 1$, но с затуханием мод, обусловленным только вязкостными потерями в среде. Рассмотрен также вопрос о влиянии волн в верхней части спектра на генерацию субгармоники и перекачку энергии вниз по спектру.

Стационарные спектры волн разных типов, возникающие при распадных взаимодействиях в заданном поле волны накачки, исследовались в средах с дисперсией (см., например, [6]). Ниже в аналогичной постановке решается задача со звуковыми волнами.

Уравнения для величин амплитуд волн, установившихся в резонаторе при вышеуказанных условиях, можно получить из уравнения Бюргерса (см., например, [7]):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t}-\varepsilon v_{1,2}\frac{\partial v_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}}=\mu\frac{\partial^2 v_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^2},\\
\tau_1=t-x/c,\quad \tau_2=t+x/c,\\
v_1(t;\,\tau_1)=v_2(t;\,\tau_2)\ \text{ при }\ \tau_1=\tau_2,\\
v_1(t;\,\tau_{1L})=v_2(t;\,\tau_{2L}),
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где μ — постоянный коэффициент, определяющий диссипацию энергии волн из-за вязкости и теплопроводности среды, $\varepsilon=(\gamma+1)/2c$ связан с показателем адиабаты γ; ε, $\mu>0$. Знаки 1 и 2 отвечают двум встречным волнам, суперпозицией которых представляется результирующее звуковое поле $v=v_1-v_2$ в резонаторе [4].

Представив решение уравнения (2) в виде суммы волн с частотами, кратными основной ω ($\omega=\pi c/L$, где L — длина резонатора):

$$
v_{1,2}(\tau_{1,2})=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp(in\omega\tau_{1,2})+\text{к. с.},
\tag{3}
$$

для комплексных амплитуд A_n, изменяющихся в среде, как в результате взаимодействия волн между собой на квадратичной нелинейности, так и вследствие диссипации, находим следующую систему уравнений:

$$
\sum_{k=1}^{n-1}A_kA_{n-k}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{*}A_{n+k}=\alpha nA_n,\quad n=1,2,\ldots,\infty,
\tag{4}
$$

где $\alpha=-i\omega\mu/\varepsilon$.

Используем эту систему уравнений для получения некоторых простых следствий из процессов перекачки энергии «вверх» и «вниз» по спектру в зависимости от частоты и амплитуды волны накачки.

Сначала рассмотрим преобразование частоты «вверх», т. е. эффекты генерации гармоник волны заданной амплитуды A_1 и частоты ω. Для малых чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re}<1$) $A_1<\alpha$ и можно допустить, что суммы $\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{*}A_{k+n}\ll\alpha nA_n$. Тогда решение (4) с достаточной степенью точности представится в виде экспоненты

$$
A_n=\alpha\exp(-\beta n),\ \beta=\ln 1{,}5\alpha/A_1,\ n=2,3,\ldots,\infty.
\tag{5}
$$

Пренебрежение второй суммой $\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{*}A_{n+k}\approx 1{,}5\alpha^2e^{-2\beta}e^{-\beta n}$ в формуле (4)

при получении (5) означает, что учитываются взаимодействия каждой моды лишь с модами меньших частот. Это оправдано для достаточно быстро спадающих по n спектров, как, например, экспоненциальных (5). Но в резонаторе с высокой добротностью величины амплитуд высоких гармоник A_n в (5) могут быть сравнимы и даже превосходить соответствующую величину амплитуды колебаний стенки. Заметим, что в решении (5) фаза амплитуды A_1 заданного поля выбрана такой же, как и у комплексного числа α. (Это всегда можно сделать выбором момента отсчета времени.) При $A_1 \gg \alpha$ ($\mathrm{Re} \gg 1$) вид спектра волн, как уже сказано выше, близок к закону $A_n \sim 1/n$ (спектр «пилы») [3, 4, 8].

Теперь исследуем в резонаторе возможность перекачки энергии «вниз» по спектру. Для этого зададим накачку на частоте 2ω и слабый сигнал на частоте ω. Такая задача для консервативных систем была рассмотрена в работе [9], где показано, что сигнал частоты ω практически не усиливается, а откачка энергии из внешнего поля идет по мере увеличения времени взаимодействия волн на генерацию мод все более высоких нечетных гармоник частоты ω. Величины амплитуд последних становятся такими же, как и у сигнала с частотой ω. Можно предположить, что введение в систему затухания $\gamma \sim \omega^2$ затруднит перекачку энергии в волны больших частот (сыграв роль, аналогичную дисперсии), позволив тем самым значительно усилить слабую моду на частоте ω. Проанализировать такую задачу в общем виде не удается. Поэтому мы пойдем по пути рассмотрения конкретных систем, последовательно увеличивая в них число волн. Тогда из системы уравнений (4) при учете только первых четырех мод получается следующее уравнение для определения пороговой (для возбуждения слабого сигнала) величины амплитуды поля накачки:

$$|A_2| - i\alpha - \frac{1}{3i\alpha}|A_2|^2 - \frac{1}{48i\alpha^3}|A_2|^4 = 0. \tag{6}$$

Уже это уравнение позволяет заметить ряд интересных особенностей. Во-первых, из (6) в пренебрежении двумя последними членами уравнения сразу следует классический порог распада $2\omega \to \omega + \omega$, равный $|A_2|_{\text{п}_1} = i\alpha$. Если же учесть три первых члена в (6) (т. е. распады $2\omega \to \omega + \omega$ и затем $\omega + 2\omega \to 3\omega$), то такое уравнение вообще не будет иметь решений: $|A_2| > 0$. Физически это обусловлено тем, что откачка энергии из волны 1 через волну 2 в волну 3 ($\omega + 2\omega \to 3\omega$) всегда превышает приход энергии из волны 2 в волну 1 ($2\omega \to \omega + \omega$), препятствуя тем самым процессу усиления. Наконец, учет второй гармоники волны накачки (исходное уравнение (6)) дает опять конечный, но превышающий первый порог $|A_2|_{\text{п}_2} = 2i\alpha > |A_2|_{\text{п}_1}$. Уравнения для порогов, включающие большее число мод, мы здесь не приводим ввиду все увеличивающейся их громоздкости. Однако отметим, что соответствующее уравнение, например с пятью волнами, опять не имеет решения: $|A_2| > 0$, а с шестью — $|A_2|_{\text{п}_3} = 3i\alpha > |A_2|_{\text{п}_2}$ и т. д. Приближенно можно считать, что

$$|A_2|_{\text{п}_m} \approx im\alpha, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Это выражение может быть использовано для оценки порога генерации звука при искусственном «обрезании» спектра путем создания в системах различными способами дисперсии. Такой непрерывный рост порога при увеличении числа волн позволяет сделать вывод об отсутствии эффекта усиления субгармоники и в такой постановке задачи (ср. с [10]).

Совершенно аналогично можно рассмотреть подобные явления, когда волна накачки задана не на второй гармонике частоты слабого сигнала, а на третьей, четвертой и т. д. Так, например, когда отношение частот сильной и слабой волн равно трем, уравнения для порогов в случаях учета второй, четвертой и пятой гармоник частоты усиливаемого сигнала име-

ют соответственно вид

$$|A_3|^2+2\alpha^2=0, \tag{8}$$

$$-2\alpha^2=0, \tag{9}$$

$$-2\alpha^2+\frac{2}{5}|A_3|^2-\frac{1}{5\alpha^2}|A_3|^4=0. \tag{10}$$

Уравнение (8) отвечает пороговой величине поля для обычного трехволнового распада $3\omega\to2\omega+\omega$, а (9), (10), разумеется, не имеют физически разумных решений. Получаются эффекты, которые были описаны выше. Таким образом, линейного затухания $\gamma\sim\omega^2$ (при зависимости коэффициентов нелинейного взаимодействия $\sim\omega$), по-видимому, вообще недостаточно, чтобы была возможна перекачка энергии «вниз» по спектру в таких системах. Однако, получив уравнение, подобное (6), для более резкого закона $\gamma\sim\omega^3$, нетрудно увидеть, что в этом случае возможно параметрическое усиление. Точно так же можно показать, что в произвольной среде без дисперсии с плавными монотонными зависимостями линейных декрементов затухания $\gamma(\omega)$ и коэффициентов распадных взаимодействий $\beta(\omega)$ звуковых волн от частоты усиление субгармоники возможно при выполнении для любого ω следующего условия:

$$4\frac{\gamma(\omega)}{\gamma(3\omega)}\left|\frac{\beta(3\omega)}{\beta(\omega)}\right|\leqslant 1. \tag{11}$$

При этом перекачка энергии слабого сигнала частоты ω в высокие гармоники на величину порога практически не влияет, и для его определения достаточно учесть лишь моду с частотой 3ω:

$$|A_2|_{\text{п}}\approx\frac{\gamma(3\omega)}{2|\beta(3\omega)|}-\left[\frac{\gamma^2(3\omega)}{4\beta^2(3\omega)}-\frac{\gamma(\omega)\gamma(3\omega)}{|\beta(\omega)\beta(3\omega)|}\right]^{1/2} \tag{12}$$

Для уравнения Бюргерса, как легко проверить, неравенство (11) не выполняется.

Хотя, как было показано, в рамках уравнения Бюргерса преобразование частоты вниз отсутствует, в то же время энергия слабого сигнала может трансформироваться «вверх» по спектру в поле волны накачки. Такую задачу мы рассмотрим на примере, когда частота сигнала вдвое меньше частоты сильной волны. Вид спектров удается найти опять же в предельных случаях малых и больших чисел Рейнольдса для волны накачки. Если $\mathrm{Re}<1$, то для амплитуд гармоник частоты сильной волны, согласно формуле (5), имеем

$$A_{2k}=A_2\exp[-2\beta(k-1)],\quad \beta=\ln\sqrt{\frac{3\alpha}{A_2}}>\frac{1}{5},\quad k=1,2,\ldots,\infty. \tag{13}$$

А для нахождения амплитуд нечетных гармоник частоты слабой волны систему уравнений (4) упрощаем до следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{n-1}A_{2k-1}A_{2n-2k}+\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k}^{*}A_{2k+2n-1}=\alpha(2n-1)A_{2n-1},\quad n=2,3,\ldots,\infty. \tag{14}$$

Отсюда, пренебрегая суммами $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ (как при получении спектра (5)) и используя выражения (13) для A_{2k}, определяем искомые величины:

$$A_{2k-1}=A_1\exp[-2\beta(k-1)+f(k)],\quad k=2,3,\ldots,\infty. \tag{15}$$

Здесь A_1 — поддерживаемая извне амплитуда слабого сигнала, так как из волны накачки энергия в него не поступает (см. выше), а $f(k)$ — малые

поправки, очень медленно растущие с номером k. Так, например, нетрудно найти из рекуррентных соотношений (14) для A_{2k-1}, что $f(2)=0$; $f(5)=0{,}33$; $f(10)=0{,}62$; $f(15)=0{,}79$; $f(20)=0{,}91$; $f(25)=1$; $f(30)=1{,}1$ и т. д., которые, следовательно, можно зачастую не учитывать. Из формулы (15) видно, что спектр слабого сигнала изменяется по закону сильной волны (13). Если же для последней выполнено условие $\mathrm{Re}\gg 1$ ($A_{2k}\sim 1/2k$), то в ее присутствии даже из слабой синусоидальной волны, для которой $\mathrm{Re}\ll 1$, формируется профиль, близкий к пилообразному: $A_{2k-1}\sim A_1/(2k-1)$. (Точность выражения для вида спектра A_{2k-1} такая же, как и для $A_{2k}\sim 1/2k$.) При этом, как это следует из вышесказанного и результатов работ [9, 10], энергия слабого сигнала, заключенная в его нечетных гармониках, превышает начальный уровень (в отсутствие волны накачки) в 2 раза $\left((4/\pi)^2\sum_{k=1}^{\infty}1/(2k-1)^2=2\right)$.

Автор благодарит А. М. Сутина за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954, § 77.
2. *Весницкий А. И., Потапов А. И.* Качественный метод исследования волновых процессов в системах с изменяющимися во времени размерами. В кн. Динамика систем. Изд. Горьк. гос. ун-та, 1957, 7, 79–83.
3. *Chester W.* Resonant Oscillations in Closed Tubes. J. Fluid Mech., 1964, *18*, 1, 44–64.
4. *Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В.* К теории нелинейных колебаний в акустических резонаторах. Акуст. ж., 1977, *23*, 5, 756—765.
5. *Coppens A. B., Sanders J. V.* Finite-Amplitude Standing Waves in Rigid-Walled Tubes. J. Acoust. Soc. America, 1968, *43*, 3, 516–529.
6. *Кольчугина И. А., Литвак А. Г., Хазанов И. В.* О многоволновых распадных взаимодействиях. Письма в ЖЭТФ, 1975, *21*, 6, 321–325.
7. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975, гл. 6.
8. *Островский Л. А.* О разрывных колебаниях в акустическом резонаторе. Акуст. ж., 1974, *20*, 1, 140–142.
9. *Roe G. M., Boyd M. R.* Parametric Energy Conversion in Distributed Systems. Proc. IRE, 1959, *47*, 7, 1213–1218.
10. *Новиков Б. К., Руденко О. В.* О вырожденном параметрическом усилении звука. Акуст. ж., 1976, *22*, 3, 461–462.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила
5 ноября 1979 г.