УДК 534.222

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В СРЕДАХ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ЗАТУХАНИЕМ

С. Н. Гурбатов

При взаимодействии интенсивных волн в нелинейной среде спектр поля обогащается новыми спектральными составляющими. Для акустических волн важную роль играет вязкость и теплопроводность среды, которые приводят к более эффективному затуханию высоких гармоник и, следовательно, могут весьма существенно изменить картину взаимодействия волн.

Пусть на входе в нелинейную среду при $x=0$ заданы две плоские гармонические волны с существенно различными частотами ω_0 и Ω ($\omega_0 \gg \Omega$):

$$v_0(t) = A \sin \omega_0 t + a \sin \Omega t. \tag{1}$$

При анализе поля $v(t, x)$ будем исходить из уравнения Бюргерса

$$v_x' - \beta v v_t' = \mu v_{tt}'', \tag{2}$$

которое, как известно, нелинейной заменой [1] сводится к линейному уравнению диффузии

$$v = -\frac{2\mu}{\beta} (\ln U)_t'; \qquad U_x' = \mu U_{tt}''. \tag{3}$$

В предельном случае, когда низкочастотная волна есть просто постоянная составляющая $-v_н$, решение для $v(t, x)$ имеет вид

$$v(t, x) = v_н + v_в^0 (t - \beta v_н x, x), \tag{4}$$

где $v_в^0(t, x)$ есть решение (2) при $v_н \equiv 0$. Таким образом, постоянная составляющая приводит к сдвигу волны на величину $-\beta v_н x$. Выражение (4) при определенных условиях справедливо и при квазистатическом изменении $v_н(t)$. Ниже проанализируем взаимодействие низкочастотной и высокочастотной волн и обсудим пределы применимости формулы (4).

Начальные условия к уравнению для вспомогательного поля записываются в виде

$$U(t, 0) = \exp \{\mathrm{Re}_н \cos \Omega t + \mathrm{Re}_в \cos \omega_0 t\}, \tag{5}$$

где $\mathrm{Re}_в = \beta A / 2\mu\omega_0$, $\mathrm{Re}_н = \beta a / 2\mu\Omega$ – акустические числа высокочастотных и низкочастотных волн. Решение уравнения (3) с начальными условиями (5) записывается в виде

$$U(t, x) = U_0(t, x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t, x), \tag{6}$$

$$U_0(t, x) = I_0(\mathrm{Re}_в) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(\mathrm{Re}_н) \cos k\Omega t e^{-\mu k^2 \Omega^2 x},$$

$$U_n(t, x) = I_n(\mathrm{Re}_в) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(\mathrm{Re}_н) \cos (n\omega_0 + k\Omega) t e^{-\mu (n\omega_0 + k\Omega)^2 x},$$

где $I_n(z)$ – модифицированные функции Бесселя. При выполнении условий

$$\mu\Omega^2 x \ll 1, \qquad a\beta\Omega x \ll 1 \tag{7}$$

низкочастотная составляющая поля U не успевает исказиться – $U_0(t, x) \approx U_0(t, 0)$, что соответствует отсутствию искажений низкочастотной составляющей поля $v(t, x)$ из-за нелинейности среды и высокочастотной диссипации. В дальнейшем будем считать эти условия выполненными.

Взаимодействие низкочастотного сигнала с высокочастотным приводит к появлению комбинационных гармоник на частотах $n\omega_0 + k\Omega$. Важным параметром при этом является величина $z = \mu\omega_0\Omega x$, характеризующая неравномерность высокочастотного затухания в полосе частот модулированного высокочастотного сигнала.

Рассмотрим вначале случай $z \ll 1$. Пренебрегая в (6) в показателе экспоненты множителем $\mu(k\Omega)^2 x$ (это соответствует предположению об отсутствии искажений низкочастотной компоненты) и проводя суммирование, имеем из (3), (6)

(8)

$$U(t,x)=e^{\mathrm{Re}_{\text{н}}\cos\Omega t}\left[I_0(\mathrm{Re}_{\text{в}})+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(\mathrm{Re}_{\text{в}})\cos(n\omega_0(t-\beta ax\sin\Omega t))\,e^{-\mu n^2\omega_0^2x}\right],$$

(9)
$$v(t,x)=a\sin\Omega t+v_{\text{в}}^0(t-\beta ax\sin\Omega t,\,x)(1-\beta a\Omega x\cos\Omega t)\approx$$
$$\approx a\sin\Omega t+v_{\text{в}}^0(t-\beta ax\sin\Omega t,\,x).$$

Здесь $v_{\text{в}}^0(t,x)$ – решение уравнения Бюргерса для гармонической волны (см. [2]). Таким образом, при $z\ll1$ низкочастотная волна приводит к фазовой модуляции гармоник высокочастотной волны.

Неравномерность затухания в полосе частот модулированного высокочастотного сигнала становится существенной при $z>1$. При этом $x\gg(\mu\omega_0^2)^{-1}$ и вся высокочастотная энергия волны сосредоточена вблизи первой гармоники. При $x\gg(\mu\omega_0^2)^{-1}$ для U имеем $U_1\ll U_0$ и, следовательно, в (3) можно воспользоваться разложением в ряд по U_1/U_0:

$$v_1(t,x)\approx-\frac{4\mu}{\beta}\frac{I_1(\mathrm{Re}_{\text{в}})}{I_0(\mathrm{Re}_{\text{в}})}\frac{\partial}{\partial t}\frac{U_1(t,x)}{U_0(t,x)}. \tag{10}$$

Используя (6) и считая по-прежнему, что $\mu(k\Omega)^2x\ll1$, можно представить $v_1(t,x)$ как суперпозицию комбинационных гармоник

$$v_1(t,x)=-\frac{2\mu}{\beta}\frac{I_1(\mathrm{Re}_{\text{в}})}{I_0(\mathrm{Re}_{\text{в}})}e^{-\mu\omega_0^2x}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}B_l(x)\cos(\omega_0+\Omega l)t, \tag{11}$$

$$B_l(x)=e^{-(2\mu\omega_0\Omega x)l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\mathrm{I}_m(\mathrm{Re}_{\text{н}})I_{l+m}(\mathrm{Re}_{\text{н}})(-1)^m e^{-(2\mu\omega_0\Omega x)m}= \tag{12}$$
$$=J_l(\mathrm{Re}_{\text{н}}\,2\,\mathrm{sh}(\mu\omega_0\Omega x))\,e^{-(\mu\omega_0\Omega x)l}.$$

При выводе (11) мы использовали формулы суммирования бесселевых функций [3].

При $z\ll1$ все гармоники, возникающие вблизи $\omega=\omega_0$, затухают одинаково и из (12) имеем

$$B_l(x)=J_l(a\beta\omega_0x). \tag{13}$$

Известно, что (13) соответствует фазовой модуляции и, следовательно, выражение (11) совпадает в этом случае с (4) и (9). Индекс угловой модуляции при этом равен $a\beta\omega_0x$ и линейно возрастает с ростом расстояния от входа в нелинейную среду. При $a\beta\omega_0x\gg1$ ширина спектра модулированного колебания равна $\Omega(a\beta\omega_0x)$ и существенно больше, чем частота низкочастотной волны. Заметим, что при $z\ll1$ и условии $\Omega\ll\omega_0$ коэффициенты взаимодействия низкочастотной волны и высокочастотных гармоник не зависят от номера комбинационной гармоники. Решение для амплитуд гармоник высокочастотного сигнала может быть при этом получено из решения бесконечной системы уравнений для амплитуд взаимодействующих волн [4].

При $z\gg1$ существенной становится неравномерность высокочастотного затухания в полосе частот модулированного сигнала. Рассмотрим вначале случай, когда $\mathrm{Re}_{\text{н}}\exp z\ll1$, т. е. индекс угловой модуляции мал. Тогда из (12) имеем

$$B_l(x)\approx(\mathrm{Re}_{\text{н}})^{|l|}\mathrm{sh}^{|l|}(z)e^{-zl}(-1)^{\frac{|l|-l}{2}}\approx\left(\frac{\mathrm{Re}_{\text{н}}}{2}\right)^{|l|}(-1)^{\frac{|l|-l}{2}}e^{(\mu\omega_0\Omega x)(|l|-l)}. \tag{14}$$

Из (11), (14) видно, что гармоники выше несущей частоты ω_0 $(l>0)$ затухают так же, как и основная частота, а при $l<0$ происходит более медленное затухание гармоник. Аналогичная картина имеет место и при взаимодействии высокочастотной волны с низкочастотным шумом [5].

При больших индексах угловой модуляции неравномерность высокочастотного затухания существенно меняет спектральный состав высокочастотной волны, а именно высшие гармоники модулированного сигнала затухают существенно быстрее, чем низшие. Заметим, что при распространении модулированного колебания в линейной среде с высокочастотным затуханием неравномерность поглощения описывалась бы множителем $\exp\{-2\mu\omega_0\Omega x\}$. Более медленная зависимость затухания в (12) обусловлена процессами нелинейного взаимодействия высокочастотных гармоник с низкочастотным сигналом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hopf E.* The Partial Differential Equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math., 1950, *9*, 3, 201–250.
2. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
4. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. М., «Наука», 1976, с. 146.
5. *Гурбатов С. Н., Дубков А. А., Малахов А. Н.* О параметрическом взаимодействии случайных волн в недиспергирующих средах. ЖЭТФ, 1977, *72*, 2, 456–465.

Горьковский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила
17 сентября 1979 г.

УДК 534.121.1

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ВСЛЕДСТВИЕ СВЯЗИ ЭЛЕМЕНТОВ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ю. А. Гурович

Наличие механических соединений между составными частями (элементами) конструкций вызывает передачу энергии колебаний из одной части в другую, которая по аналогии с коэффициентом внутренних потерь энергии в отдельном элементе может быть охарактеризована коэффициентом потерь вследствие их взаимодействия (связи). Ниже для некоторых видов соединений коэффициент потерь связи определяется на основании соотношения [1]

$$\eta_{\alpha\gamma}=\frac{\Pi_{\alpha\gamma}}{\omega E_\alpha}, \tag{1}$$

где $\Pi_{\alpha\gamma}$ – поток энергии из элемента α в элемент γ, E_α – энергия в элементе α, ω – круговая частота.

Рассмотрим жесткое точечное соединение стержня (α) с пластиной (γ). Пусть из стержня на соединение падает изгибная или продольная волна, поток энергии которой есть

$$\Pi_\alpha=w_\alpha c_{\text{г}\alpha}, \tag{2}$$

где $w_\alpha=E_\alpha/l_\alpha$ – энергия, приходящаяся на единицу длины стержня, E_α – полная энергия в стержне длиной l_α, $c_{\text{г}\alpha}$ – групповая скорость. Из выражения (2) найдем $E_\alpha=\Pi_\alpha l_\alpha/c_{\text{г}\alpha}$ и, подставив этот результат в формулу (1), получим $\eta_{\alpha\gamma}=\Pi_{\alpha\gamma}(\Pi_\alpha l_\alpha\omega/$ $/c_{\text{г}\alpha})^{-1}=t_{\alpha\gamma}(l_\alpha\omega/c_{\text{г}\alpha})^{-1}$, где $t_{\alpha\gamma}=\Pi_{\alpha\gamma}/\Pi_\alpha$ – коэффициент прохождения энергии волны через соединение. Конкретизируя последнюю формулу, для изгибных и продольных волн в стержне получим соответственно

$$\eta_{\alpha\gamma}{}^{\text{и}}=\frac{2t_{\alpha\gamma}{}^{\text{и}}}{k_{\text{и}\alpha}l_\alpha},\qquad \eta_{\alpha\gamma}{}^{\text{п}}=\frac{t_{\alpha\gamma}{}^{\text{п}}}{k_{\text{п}\alpha}l_\alpha}, \tag{3}$$

где $k_{\text{и}\alpha}$ и $k_{\text{п}\alpha}$ – волновые числа изгибных и продольных волн. Наличие множителя 2 в первой из формул (3) объясняется тем, что для изгибных волн групповая скорость вдвое превышает фазовую.

Для случая углового соединения пластин при нормальном падении волн на линию соединения аналогичные соотношения имеют вид:

$$\Pi_\alpha=w_\alpha c_{\text{г}\alpha}l_{\alpha\gamma},\quad E_\alpha=w_\alpha S_\alpha=\Pi_\alpha S_\alpha(c_{\text{г}\alpha}l_{\alpha\gamma})^{-1},\quad \eta_{\alpha\gamma}=t_{\alpha\gamma}l_{\alpha\gamma}c_{\text{г}\alpha}(\omega S_\alpha)^{-1}$$

и

$$\eta_{\alpha\gamma}{}^{\text{и}}=\frac{2t_{\alpha\gamma}{}^{\text{и}}l_{\alpha\gamma}}{k_{\text{и}\alpha}S_\alpha},\qquad \eta_{\alpha\gamma}{}^{\text{п}}=\frac{t_{\alpha\gamma}{}^{\text{п}}l_{\alpha\gamma}}{k_{\text{п}\alpha}S_\alpha}, \tag{4}$$

где $l_{\alpha\gamma}$ – длина линии соединения, S_α – площадь пластины α, $t_{\alpha\gamma}{}^{\text{и}}$ и $t_{\alpha\gamma}{}^{\text{п}}$ – коэффициенты прохождения энергии изгибных и продольных волн из пластины α в пластину γ при нормальном падении. Отметим, что первое из соотношений (4) отличается множителем $2l_{\alpha\gamma}(k_{\text{и}\alpha}S_\alpha)$ от значения, приведенного в работе [2], где коэффициент потерь связи приравнивается коэффициенту прохождения энергии.