АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 3

УДК 534.26

К ВОПРОСУ О ЗВУКОВОМ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

И. Л. Рубанов

Методом Римана — Гильберта решена задача о звуковом поле бесконечного цилиндрического излучателя со смешанными граничными условиями на его поверхности.

В современной прикладной акустике широко используются цилиндрические излучатели, часть поверхности которых для создания направленного излучения покрывается слоем экранирующего материала. Математическая модель излучателя в акустически мягком экране произвольной толщины рассмотрена в работе [1]. В работе [2] показано, что во многих случаях можно ограничиться простейшей расчетной моделью — цилиндрическим излучателем со смешанными граничными условиями. Ранее звуковое поле цилиндрического излучателя со смешанными граничными условиями рассматривалось в работах [3—5] различными модификациями метода наименьших квадратов. В настоящей работе эта же задача решена при помощи метода Римана — Гильберта [6].

Рассмотрим установившееся звуковое поле, излученное цилиндрическим преобразователем радиуса a, на части поверхности которого, ограниченной двумя образующими, задана колебательная скорость $U(\varphi)$, а остальная часть поверхности предполагается акустически мягкой (фиг. 1). Задача заключается в следующем: найти функцию $p(r, \varphi)$ (звуковое давление), являющуюся решением уравнения Гельмгольца и удовлетворяющую условиям излучения на бесконечности и граничным условиям на поверхности цилиндра

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=U(\varphi), \qquad |\varphi|<\varphi_0,$$

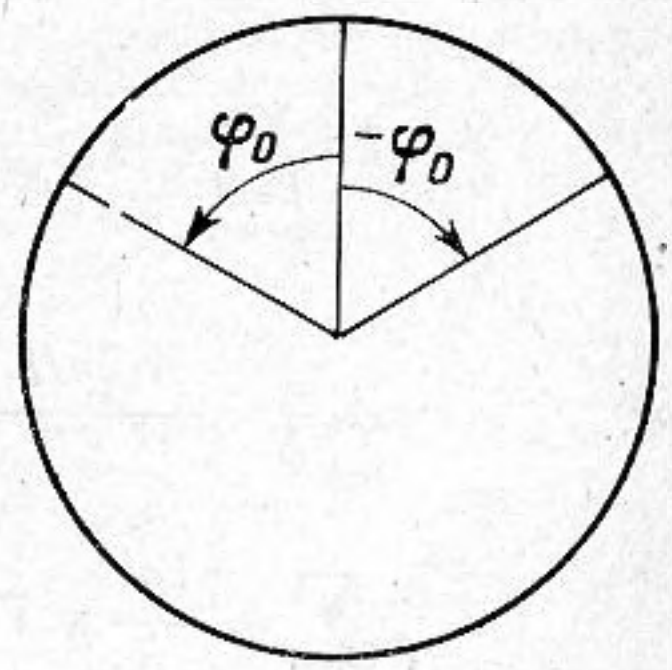
(1)

$$p=0, \qquad \varphi_0<|\varphi|<\pi.$$

Предположим, что

$$U(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\varphi}.$$

Акустическое давление будем искать в следующем виде:



Фиг. 1. Геометрия задачи

(2) $$p=i\rho c\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr)\, e^{in\varphi}.$$

В выражениях (1), (2) ρ — плотность среды, c — скорость звука в среде, ω — угловая частота, $k=\omega/c$ — волновое число, $H_n^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода, a_n — неизвестные амплитуды.

Применив к выражению (2) граничные условия (1), введя новые неизвестные A_n, связанные со старым соотношением

$$A_0=a_0 H_0^{(1)}(ka), \qquad A_n=na_n H_n^{(1)}(ka),$$

а также параметр

$$\varkappa_n = 1 + \frac{kaH_n^{(1)\prime}(ka)}{|n| H_n^{(1)}(ka)}, \tag{3}$$

имеющий оценку при $|n| \gg 1$

$$\varkappa_n \sim \text{const}\, n^{-2},$$

получим следующую систему функциональных уравнений:

$$\begin{gathered} A_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{A_n}{n} e^{in\varphi} = 0, \qquad \varphi_0 < |\varphi| < \pi, \\ \frac{A_0 kaH_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} A_n (1-\varkappa_n) \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = \\ = -ka \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\varphi}, \qquad |\varphi| < \varphi_0. \end{gathered} \tag{4}$$

Нетрудно заметить, что система уравнений (4) имеет стандартный вид для применения метода задачи Римана — Гильберта [6]. После применения этого метода мы получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} A_l = -\frac{A_0 kaH_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} V_l^0(y) + \sum_{n\neq 0} A_n \frac{|n|}{n} \varkappa_n V_l^n(y) - \\ -ka \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n V_0^n(y) + 2A_{-1} R_l(y); \\ 0 = -\frac{A_0 kaH_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} V_0^0(y) + \sum_{n\neq 0} A_n \frac{|n|}{n} \varkappa_n V_0^n(y) - \\ -ka \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n V_0^n(y) + 2A_{-1} R_0(y); \\ -A_0 = -\frac{A_0 kaH_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} V_\sigma^0(y) + \\ + \sum_{n\neq 0} A_n \frac{|n|}{n} \varkappa_n V_\sigma^n(y) - ka \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n V_\sigma^n(y) + 2A_{-1} R_\sigma(y), \end{gathered} \tag{5}$$

где $y = \cos\varphi_0$; коэффициенты $R_m(y)$, $R_\sigma(y)$, $V_\sigma^n(y)$, $V_m^n(y)$ определены в работе [6]. Система уравнений (5) определяет звуковое поле при произвольных размерах излучающей поверхности и произвольном распределении колебательной скорости.

Пусть излучатель возбуждается симметрично, т. е.

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n u_n \cos n\varphi.$$

В этом случае из очевидных физических соображений $p(r, \alpha)=p(r, -\alpha)$

$$a_{-n}=(-1)^n a_n,$$

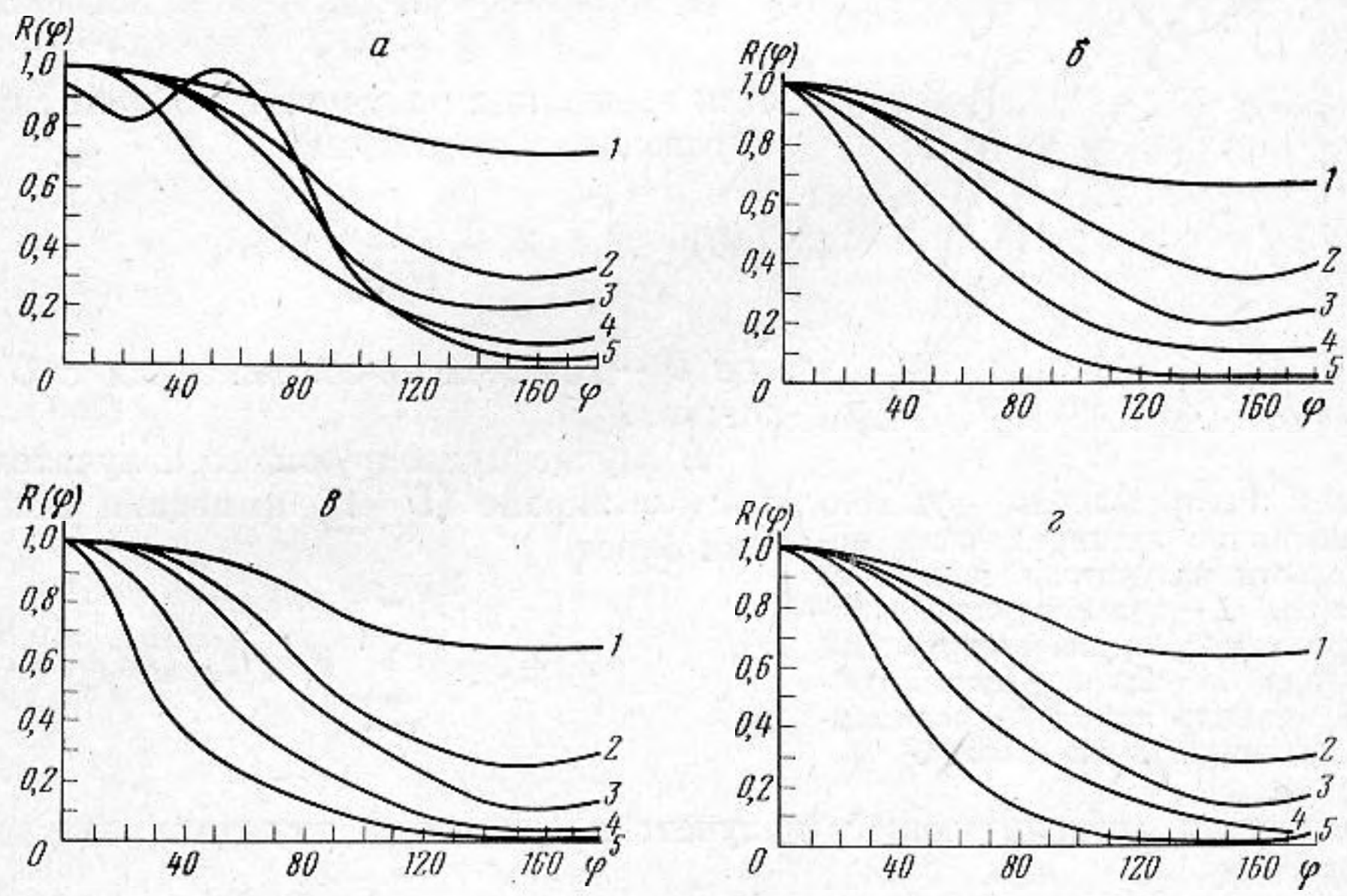
$$p=i\rho c \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi, \tag{6}$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases} 1, & n=0, \\ 2, & n>0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$A_{-n}=-A_n, \quad \varkappa_{-n}=\varkappa_n.$$

Рассмотрим поле линейного источника на акустически мягком цилиндре. В первом приближении из системы (5) выражения для коэффициентов



Фиг. 2. Характеристики направленности цилиндрических излучателей со смешанными граничными условиями: *1* – $ka=0{,}1$; *2* – $ka=0{,}5$; *3* – $ka=1$; *4* – $ka=2$; *5* – $ka=10$; *а* – пульсирующий цилиндр $\varphi_0=90°$, *б* – осциллирующий цилиндр $\varphi_0=90°$, *в* – пульсирующий цилиндр $\varphi_0=60°$, *г* – осциллирующий цилиндр $\varphi_0=60°$

принимают вид

$$A_m=-\frac{ka}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n u_n \sum_{l=0}^{n}\rho_{n-l}(y)\left[P_{n-m}(y)-P_{l+m}(y)\right],$$

$$A_0=ka\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n u_n \omega_n, \tag{7}$$

$$\omega_n=\frac{1}{2n}\left[P_n(y)-P_{n-1}(y)\right], \qquad \omega_0=\ln\frac{1+y}{2},$$

$P_n(y)$ – полиномы Лежандра, полиномы $\rho_n(y)$ определены в работе [6].

Используя оценку для полиномов Лежандра, получаем

$$A_m \sim \text{const}\, \varphi_0^2 \forall m,$$

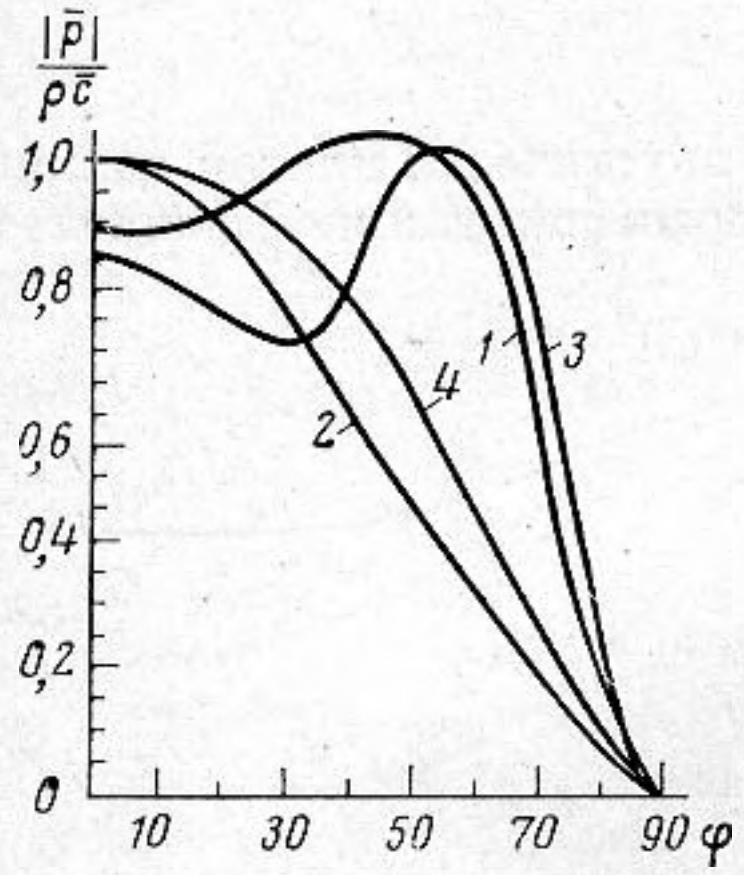
откуда следует, что в первом приближении поле линейного источника имеет порядок $O(\varphi_0^2)$.

Выведем выражения для поля в волновой зоне, характеристики направленности и импеданца излучения рассматриваемой модели. Из выражения (6) для волновой зоны $kr \gg 1$ следует

$$p = i\rho c \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr-\pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n (-i)^r \cos n\varphi. \tag{8}$$

Диаграмма направленности, пронормированная к значению звукового давления, излучаемого в направлении $\varphi_т$, в соответствии с определением [7] примет вид

$$R(\varphi) = \left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n (-i)^n \cos n\varphi}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n (-i)^n \cos n\varphi_т} \right| \tag{9}$$



Фиг. 3. Распределение звукового давления по активной части поверхности излучателя в мягком экране. *1* – пульсирующий цилиндр $ka=2$; *2* – осциллирующий цилиндр $ka=2$; *3* – пульсирующий цилиндр $ka=5$; *4* – осциллирующий цилиндр $ka=5$

Для импеданца излучения в общем случае справедливо выражение

$$Z_s = \frac{1}{|U|} \int_S p\bar{U} dS, \tag{10}$$

где $\bar{U}$ – комплексно-сопряженная с U величина.

В случае пульсирующего излучателя в мягком экране ($U=1$) импеданц излучения будет

$$Z_s = 2i\rho ca \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n H_n^{(1)}(ka) \cdot \frac{\sin n\varphi_0}{n}.$$

Для случая осциллирующего излучателя ($U=\cos\varphi$) импеданц излучения имеет вид

$$Z_s = 2i\rho ca \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n H_n^{(1)}(ka) \left[\frac{\sin(n+1)\varphi_0}{2(n+1)} + \frac{\sin(n-1)\varphi_0}{2(n-1)} \right].$$

Расчеты проводились нами для случаев $U=1$ и $U=\cos\varphi$ (соответственно пульсирующий и осциллирующий излучатель в мягком экране) и различных значений ka и φ_0 на ЭВМ БЭСМ-4. При решении система (5) усекалась по рекомендациям работы [7] на уровне $N=2ka+1$.

На фиг. 2, *а*, *б* приведены характеристики направленности соответственно пульсирующего и осциллирующего цилиндров в мягком экране для значения $\varphi_0=90°$, на фиг. 2, *в*, *г* – то же самое для значения $\varphi_0=60°$. Сопоставляя результаты, следует отметить, что если для $\varphi_0=90°$ введение косинусного распределения колебательной скорости обостряет характеристику направленности по сравнению с характеристикой пульсирующего излучателя, то при $\varphi_0=60°$ между характеристиками пульсирующего и осциллирующего излучателей в мягком экране существенной разницы не наблюдается.

На фиг. 3 приведено распределение давления по активной части поверхности экранированного излучателя при $\varphi_0=90°$. Очевидно, что поле цилиндрического излучателя в мягком экране обладает существенной неравномерностью и вследствие этого, по оценке работы [8], низкой кавитационной устойчивостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вовк И. В., Гринченко В. Т., Маяцкий В. И.* Звуковое поле бесконечного кругового цилиндрического преобразователя, частично покрытого слоем акустически мягкого материала. Акуст. ж., 1972, *18*, 3, 365—369.
2. *Вовк И. В., Гринченко В. Т.* К вопросу о направленности цилиндрического излучателя, частично покрытого слоем экранирующего материала. Акуст. ж., 1975, *21*, 2, 294—295.
3. *Карновский М. И., Лозовик В. Г.* Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Акуст. ж., 1964, *10*, 3, 313—317.
4. *Обозненко И. Л.* О скалярном поле цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Сб. тр. Киевского политехн. ин-та, 1965, 2, 75—81.
5. *Обозненко І. Л.* Про одну змішану задачу для рівняння Гельмгольца у зовнішности циліндра. Докл. АН УРСР, 1966, 7, 862—866.
6. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1971.
7. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
8. *Sherman C. H.* Effect of the Nearfield on the Cavitation Limit of Transducers. J. Acoust. Soc. America, 1963, *35*, 1, 6—9.

Поступила
21 марта 1977 г.