УДК 534.83

ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГЮЙГЕНСА

С. И. Коняев, В. И. Лебедев, М. В. Федорюк

Пусть S – замкнутая гладкая поверхность в пространстве, и пусть звуковое поле p удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца $(\Delta+k^2)p=0$ внутри S и в некоторой окрестности S. Тогда справедлива формула

$$\tilde{p}(x)=\iint\left[p(x')\frac{\partial}{\partial n_{x'}}G(x,x')-G(x,x')\frac{\partial}{\partial n_{x'}}p(x')\right]dS'=\begin{cases}p(x), & x \text{ внутри } S,\\ 0, & x \text{ вне } S.\end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\quad G(x,x')=\dfrac{1}{4\pi|x-x'|}\exp[ik|x-x'|]$, $\dfrac{\partial}{\partial n_{x'}}$ – производная по внешней нормали к S в точке x'. Формула (1) имеет следующую физическую интерпретацию: $\tilde{p}(x)$ – это звуковое поле, созданное непрерывно распределенными на S монопольными и дипольными точечными излучателями с плотностями $-\dfrac{\partial}{\partial n_{x'}}p(x')$, $p(x')$ соответственно. Излучатели предполагаются акустически прозрачными. Поверхность S с таким расположением излучателей названа в работах [1, 2] поверхностью Гюйгенса.

Мы рассматриваем задачу о дискретной аппроксимации поверхности Гюйгенса. Именно, требуется расположить на S конечное число точечных монопольных и дипольных излучателей так, чтобы созданное ими поле $\tilde{p}_{д}(x)$ приближенно совпадало с полем $\tilde{p}(x)$ вне некоторой окрестности поверхности S. Математически эта задача эквивалентна задаче об аппроксимации интеграла по поверхности S конечной суммой:

$$\iint_S f(x)\,dS\approx\sum_{j=1}^{n}a_jf(x^j).$$

Для дискретной аппроксимации мы используем квадратурные формулы для вычисления интегралов по сфере, полученные в работах [3–5]. Это квадратурные формулы типа Гаусса, инвариантные относительно групп вращений – группы октаэдра G_8 и группы икосаэдра G_{20}. На существование таких формул указано в работе [6], где также получено несколько важных теорем об инвариантных квадратурных формулах.

Расчеты были проведены нами на ЭВМ БЭСМ-6 по квадратурной формуле, содержащей $N=302$ точки, которая точно интегрирует первые 900 сферических гармоник. Радиус сферы R был принят равным единице, падающее поле – в виде $p=e^{-ikx_3}$, т. е. вычислялся интеграл:

$$\tilde{p}(x)=\iint_S\left[e^{-ikx_3'}\frac{\partial}{\partial R'}G(x,x')-G(x,x')\frac{\partial}{\partial R'}e^{-ikx_3'}\right]dS'. \tag{2}$$

Вычислялось отклонение $\Delta(x)$ дискретной аппроксимации от непрерывной

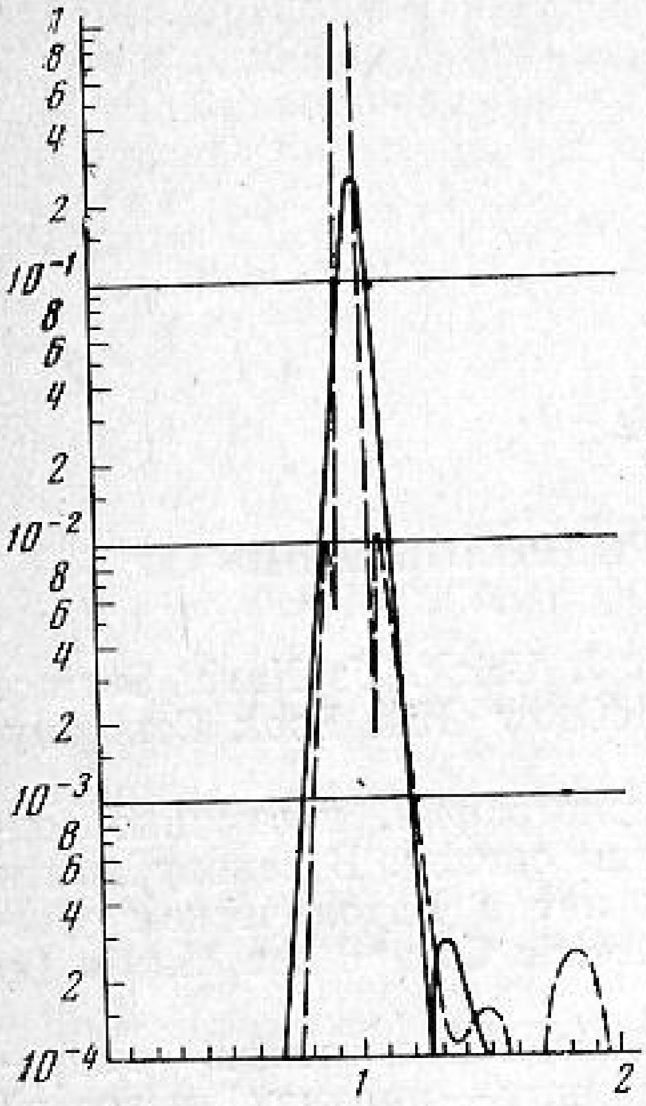
$$\Delta(x)=|\tilde{p}(x)-p_{д}(x)|,$$

на расстояниях $0\leqslant|x|\leqslant10$ с шагом 0,1 по радиусу в направлении оси Ox_3 (обратном по отношению к направлению падающей волны) и в направлении луча l, который образует углы $\pi/3$, $\pi/3$ с осями Ox_1, Ox_2.

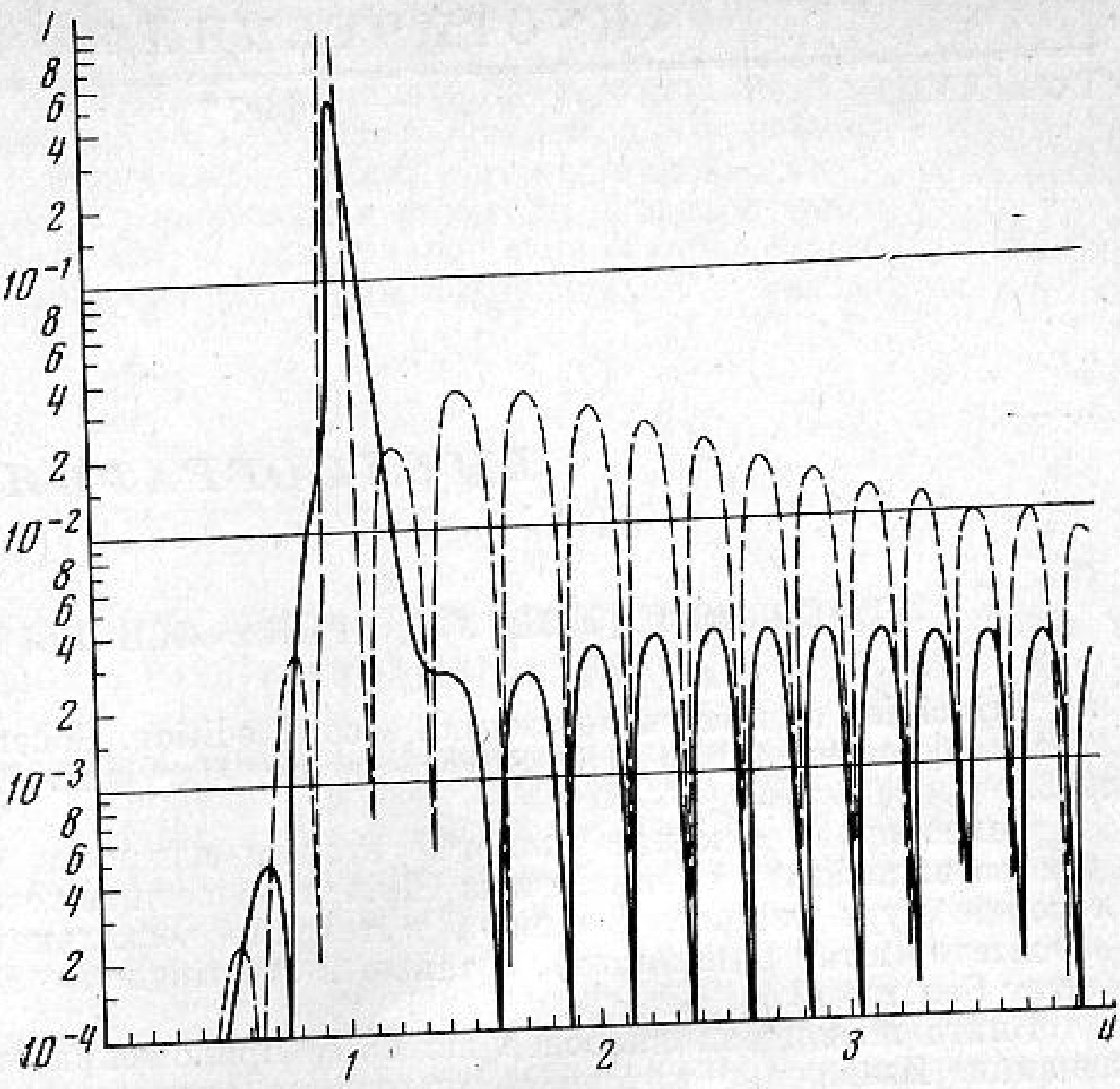
Введем *волновую плотность* ρ_w системы излучателей, расположенных на поверхности S:

$$\rho_w=\sqrt{N/S_w},$$

где S_w – волновая площадь поверхности S, т. е. $S_w=S/\lambda^2$ (λ – длина волны). Для сферы радиуса R имеем $\rho_w=\dfrac{\lambda}{2R}\sqrt{N/\pi}$, и в нашем случае ($N=302$, $R=1$) $\rho_w\approx5\lambda$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. По оси x отложено расстояние от центра сферы, по оси y – величина $\frac{1}{2}\lg\Delta(x)$: штриховая линия – в направлении Oz, сплошная – в направлении луча l при $k=4\pi$

Фиг. 2. По оси x отложено расстояние от центра сферы, по оси y – величина $\frac{1}{2}\lg\Delta(x)$: штриховая линия – в направлении Oz, сплошная – в направлении луча l при $k=5\pi$

Расчеты были произведены по $0 \leqslant k \leqslant 0{,}5\pi$, с шагом $0{,}1\pi$ при $k/\pi=1{,}5$; 2; 3; 4 и 5,2 (длина волны λ изменяется от 0,4 до $+\infty$). При этом оказалось, что отклонение $\Delta(x)$ имеет идентичный характер и для направления оси Ox_3, и для направления l. При значениях $0 \leqslant k \leqslant 4\pi$, т. е. при $2{,}45 \leqslant \rho_w \leqslant \infty$, ошибка $\Delta(x) \leqslant 10^{-3}$ (т. е. 60 *дб*) на расстояниях от сферы S: $R_+=0{,}3R$ (вне сферы) и $R_-=0{,}2R$ (внутри сферы). При $k=5{,}2\pi$ (т. е. при $\rho_w \approx 2$) имеем $R_+=5{,}4$, $R_-=0{,}4$, так что ошибка $\Delta(x)$ уменьшается до уровня -60 *дб* на расстояниях от сферы порядка 14λ. На бо́льших расстояниях ошибка $\Delta(x)$ имеет тот же порядок и носит осциллирующий характер.

Фигуры 1, 2 показывают, что при $\rho_w \geqslant 2{,}5$ отклонение $\Delta(x)$ дискретной аппроксимации от непрерывной модели достаточно быстро спадает как внутри, так и вне сферы. При $\rho_w=2$ отклонение $\Delta(x)$ вне сферы носит осциллирующий характер и не падает ниже уровня 10^{-3}. Последнее обстоятельство объясняется тем, что в этом случае решетка на сфере становится редкой и волна «просачивается» сквозь нее.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Jessel.* Acoustique théoretique, Masson et C^{ie}, Paris, 1973.
2. *М. В. Федорюк.* О работах Г. Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 14, 169—179.
3. *В. И. Лебедев.* Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса — Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией. ЖВМ и МФ, 1975, *15*, 1, 48—54.
4. *В. И. Лебедев.* О квадратурных формулах для сферы наивысшей алгебраической степени точности, Сб. тр. МИ СО АН СССР. Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, «Наука», 1973.
5. *С. И. Коняев.* Квадратурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы икосаэдра. Препринт ИАЭ-2516, 1975.
6. *С. Л. Соболев.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы. Сиб. матем. ж., 1962, *3*, 5, 769—796.

Поступила
19 мая 1976 г.

Акустический институт
Академии наук СССР